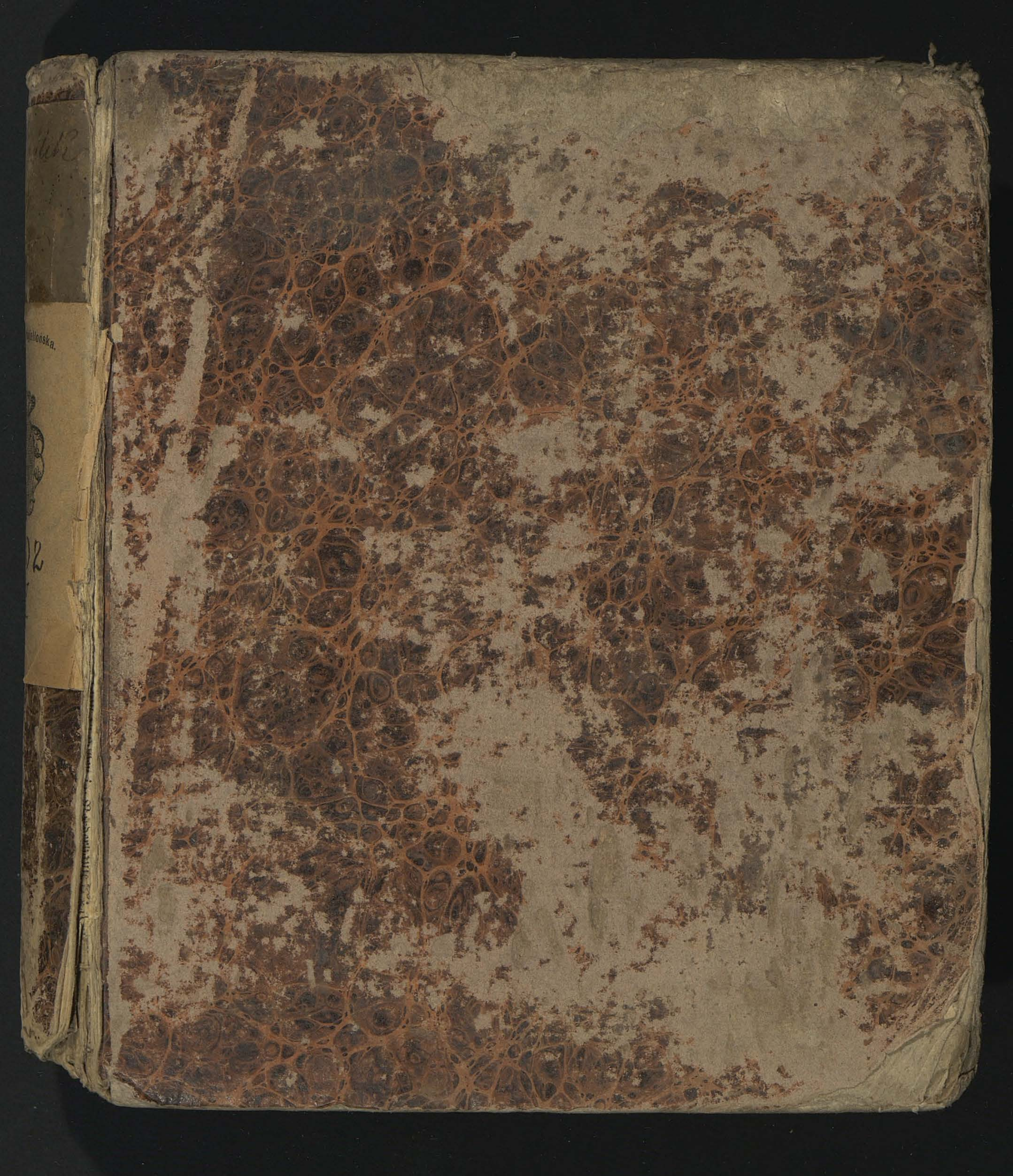
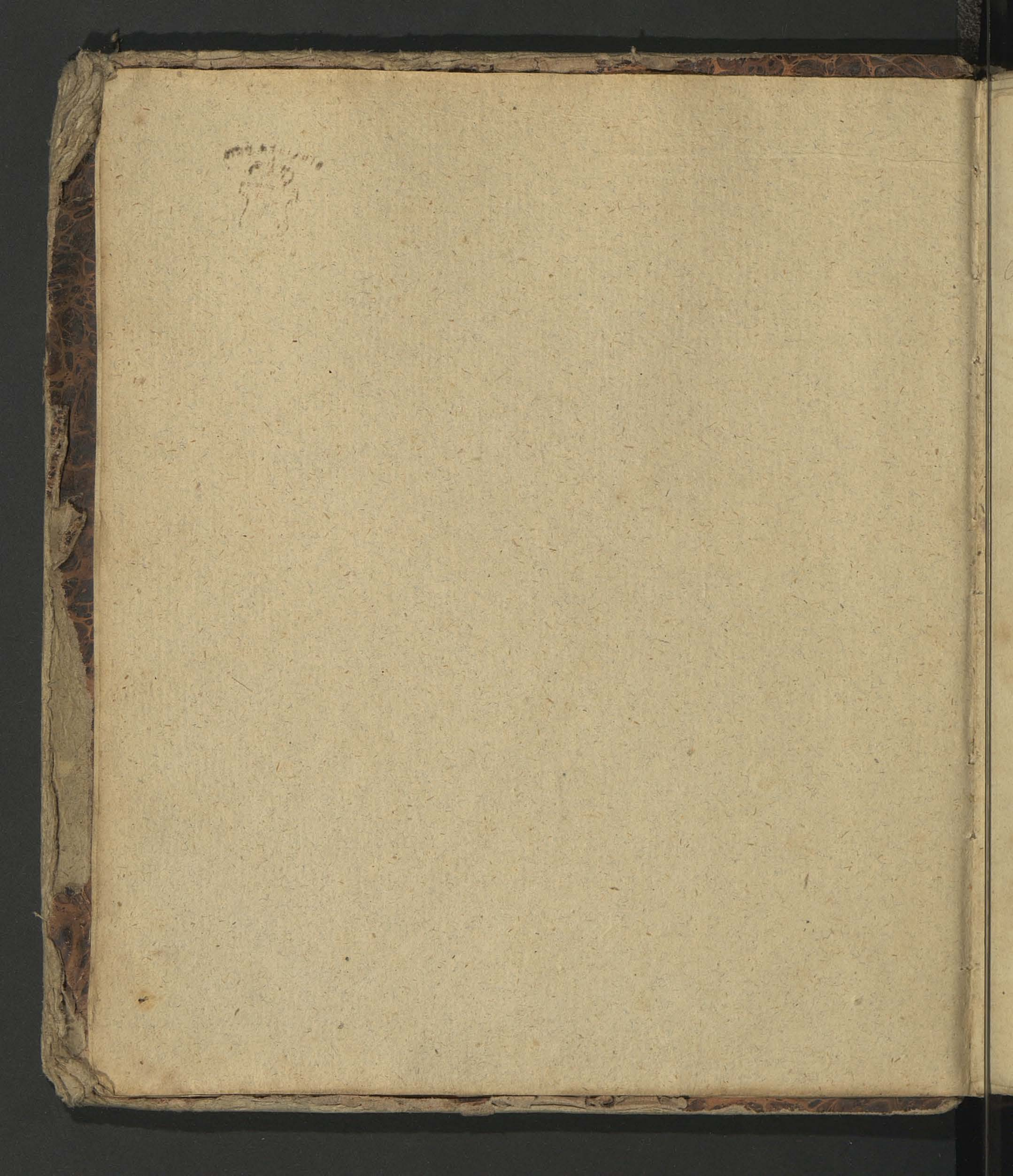


[illegible] Mathematik.

1., Analysis
2., Differential und Integral Rechnung
3., Euclids Geometrie



Zu Ohms System der Mathematik 1. Theil

1.

Sätze der Addition und Subtraction

I $a+b = b+a$

II $(a+b)+c = (a+c)+b = (b+a)+c = (c+a)+b$ etc.

III $(a-b)+b = a$

IV $(a+b)-b = a$

V $a-(a-b) = b$

VI $(a+b)-c = (a-c)+b$

VII $(a-b)+c = (a+c)-b = (c-b)+a$

VIII $a-(b+c) = (a-b)-c$

IX $a-(b-c) = (a-b)+c = (a+c)-b$

X $(a-b)-c = (a-c)-b$

XI $(a-b)+(c-d) = (a+c)-(b+d)$

Die allgemeinen Beweise dieser Sätze gibt das Theorema, wenn $a>b$ so ist $a+m > b+m$. Die daraus folgt wenn $a+m = b+m$ so ist $a=b$. Zwei Größen werden also einander gleich, wenn ein drittes zu beyden addirt die Summen gleich macht. In diesen Sätzen ist immer die 2te Größe der Subtrahend. Der Subtrahend soll zur Diff. addirt werden um den Minuendus zu geben.
Es folgt hieraus aus diesem Satze daß $(a-b)$ zu § 20 und neue Zeichen bedeuten kann, die die [illegible] Eigenschaft hat, daß sie zu b addirt a giebt. Denn müßten einen andern zu b. x so müßten die kl. oder größer als $(a-b)$ seyn, und da b hier die m Zahl vorstellt so gilt der Satz

$$(a+b)+b \gtrless (a-b)+x$$

daher kann b nicht = seyn x.

Zu § 14. Mathematisch beweisen daß der Satz gilt für $m+1$ Summanden wenn er für m Summanden gilt. Denn bezeichnen wir die m Summanden durch A und den $(m+1)$ten Summand durch a, so ist die Summe der $m+1$ Summanden $= (A)+a$ da nun $a+b = b+a$ so ist $(A)+a = a+(A)$ d. h. daß einerlei in welcher Ordnung wenn der $m+1$te Summand addirt, [illegible] die m gilt [illegible] eine beliebige Ordnung annehmen können. Nun sehen aber daß bei 2 Summanden dieses gilt, daher gilt es auch für 3, 4, 5, m Summanden.

Zu § 52. Dieselbe Art des Beweises angewendet ist $a>b$ so ist $a^{m+1} > b^{m+1}$ wenn m absolute Zahl ist. Denn $a^{m+1} = a^m \cdot a$ und $b^{m+1} = b^m \cdot b$ also soll $a^m \cdot a > b^m \cdot b$. Da nun $a > b$ und auch $a^m > b^m$ so ist $a^m \cdot a > b^m \cdot b$. d. h. $a^{m+1} > b^{m+1}$, wenn nur $a^m > b^m$. Aber $a^2 > b^2$ (denn $a^2 = a \cdot a$ und $b^2 = b \cdot b$ da nun $a>b$, $a>b$ so ist $a^2 > b^2$) daher ist auch $a^3 > b^3$, $a^4 > b^4$ allg. $a^m > b^m$.
m. z. b. w.

zu § 66. Untersucht man ob $a-(b-c)=(a-b)+c$ ist, so addire man auf beyden Seiten $(b-c)$ und erhält so $\left[a-(b-c)\right]+(b-c)=(a-b)+c+(b-c)$ oder

$$a=(a-b)+(b-c)+c=(a-b)+b=a$$

zu § 68. Weil $a=b$ so ist nach § 66. $a+p$ und $b+p$ ein und dieselben. dieses ist auch $a+m=b+m$ weil $(a+m)+p=(b+m)+p=(a+p)+m=$ $=(b+p)+m$. In den übrigen Gleichungen muß ich bald dritte Größen mit solchen Größen nehmen damit nach der Behandlung zu § 66 übrig bleiben entweder $a+p=b+p$ oder $m+(a+p)=$ $=m+(b+p)$.

Sätze der Radication

1) $\sqrt[b]{(a^b)}=a$

2) $\sqrt[m]{(ab)}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}$

3) $\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$

4) $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$

5) $\sqrt[m]{a^n}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$, denn $\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{a}$. n mahl $=\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$

6) $\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[m:n]{a}$ denn $\left(\sqrt[m:n]{a}\right)^m=\sqrt[m:n]{a^m}=a^{\frac{m:n}{m}}=a^n$

7) $\sqrt[mn]{a}=\sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a}\right)}$ denn $\left(\sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a}\right)}\right)^{mn}=\sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a^{mn}}\right)}=\sqrt[m]{a^m}=a$

8) $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{m}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}\cdot n}}\cdot\sqrt[m]{b^{\frac{1}{n}\cdot m}}=$ $=\sqrt[mn]{a^n}\cdot\sqrt[mn]{b^m}=\sqrt[mn]{(a^n\cdot b^m)}$

9 $\sqrt[m]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}}$

10) $a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{(a^n\cdot b)}$

11) $a:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{(a^n:b)}$

12) $\sqrt[m]{a}:b=\sqrt[m]{(a:b^m)}$

<u>Sätze der Logarithmen</u>

ist $a=b$ so ist, ist $a>b$ so ist

$m^a=m^b$ $\qquad$ $m^a>m^b$

$a?m=b?m$

$m?a=m?b$

Der Logarithm $a?b$ hat nur einen Bedeutung die [illegible] denn hätten wir einen 2ten Log. so würden $b^x=b^z$ werden welches nicht sein kann wenn x u. z verschiedene Zahlen sind

<u>Lehrsätze</u>

1) $(a^b)?a=b$ denn $a^b=(a^b)$ welches auch deutlich ist denn der Exponent von (a^b) bei der Basis a ist $=b$.

2) $a?(\sqrt[b]{a})=b$ denn $(\sqrt[b]{a})^b=a$ denn sobald die Basis die b^{te} √ aus a ist so muss der Expon: b sein um a zu geben

3) $\sqrt[a?b]{a}=b$ denn $b^{a?b}=a$ nach der Definition. Denn der Radicant a besteht aus b und dessen Exponenten von b d. h. $=b^x$ wenn ich nun $\sqrt[a?b]{}$ aus a ziehe d. h. $\sqrt[x]{(b^x)}=b$

4) $(ab)?p=a?p+b?p$ denn $p^{(a?p+b?p)}=p^{a?p}\cdot p^{b?p}=a\cdot b$ denn sobald die Basis dieselben sind bei den Factoren so müssen die Exponenten derselben den Exponenten des Productes geben

5) $\frac{a}{b} ? p = a ? p - b ? p$

dann $p^{a?p - b?p} = \frac{p^{a?p}}{p^{b?p}} = \frac{a}{b}$

6) $(a^b) ? p = b \cdot (a ? p)$

dann $p^{b \cdot (a?p)} = (p^{a?p})^b = a^b$

7) $(\sqrt[b]{a}) ? p = (a ? p) : b$

dann $p^{(a?p):b} = \sqrt[b]{p^{a?p}} = \sqrt[b]{a}$

8) $a ? c = (a ? b)(b ? c)$ dann

$c^{(a?b)\cdot(b?c)} = (c^{b?c})^{a?b} = b^{a?b} = a$

9) $\frac{a?c}{b?c} = a?b$ dann $b^{\frac{a?c}{b?c}} = \sqrt[b?c]{b^{a?c}} =$

$\left(\sqrt[b?c]{b}\right)^{a?c} = c^{a?c} = a$

10) $\frac{a?c}{a?b} = b?c$ dann $c^{\frac{a?c}{a?b}} = \sqrt[a?b]{c^{a?c}} = \sqrt[a?b]{a} = b$

11) $a ? \sqrt[d]{c} = d \cdot (a?c)$ dann $(\sqrt[d]{c})^{d\cdot(a?c)} = (\sqrt[d]{c}^{\,d})^{a?c} = c^{a?c} = a$

12) $a ? \sqrt[d]{c} = d : (c?a)$ dann $\sqrt[d]{c}^{\frac{d}{c?a}} = \sqrt[c?a]{c} = a$

13) $(a^d) ? c = a ? \sqrt[d]{c}$. dann ~~[illegible]~~ $a ? \sqrt[d]{c} = d : (c?a)$

gleich? $c^{d:(c?a)} = \sqrt[c?a]{c^d} = \left(\sqrt[c?a]{c}\right)^d = a^d$

14) $a^{d}?c = d:(c?a) =$ [illegible]

15) $a?(c^{d}) = (a?c):d$ denn $(c^{d})^{\frac{a?c}{d}} = (\sqrt[d]{c^{d}})^{a?c} = c^{a?c} = a$

16) $(\sqrt[d]{a})?c = a?c^{d}$ denn $c^{a?c:d} = \sqrt[d]{a}$

17) $a^{b}?a^{c} = b:c$ denn $(a^{c})^{\frac{b}{c}} = (\sqrt[c]{a^{c}})^{b} = a^{b}$

18) $a^{b}?c^{b} = a?c$ denn $(c^{b})^{a?c} = (c^{a?c})^{b} = a^{b}$

19.) $\sqrt[b]{a}?\sqrt[c]{a} = c:b$ denn $(\sqrt[c]{a})^{\frac{c}{b}} = \sqrt[b]{\sqrt[c]{a^{c}}} = \sqrt[b]{a}$

20) $\sqrt[b]{a}?\sqrt[b]{c} = a?c$ denn $(\sqrt[b]{c})^{a?c} = (\sqrt[b]{a})$

21) $(a^{b})?\sqrt[d]{a} = bd$ denn $(\sqrt[d]{a})^{bd} = a^{b}$.

22) $d.(a?c) = d:(c?a)$ denn $d:(c?a) = a?\sqrt[d]{c}$

also $(\sqrt[d]{c})^{d.a?c} = c^{a?c} = a$

23) $a^{c?d} = \sqrt[d?a]{c}$ denn ~~$(\sqrt[d?a]{c})^{c?d} = c^{d?a}$~~

denn $(a^{c?d})^{d?a} = d^{c?d} = c$

24.) $a^{c?d} = \sqrt[d?c]{a}$ denn weil $a^{c?d} = \sqrt[d?a]{c}$ so ist $\sqrt[d?a]{c} = \sqrt[d?c]{a}$ weil $(\sqrt[d?a]{c})^{d?c} = \sqrt[d?a]{d} = a$

~~24) $a^{c?d} = \sqrt[d?c]{a}$ denn $(a^{c?d}) =$~~

25) $a^{c?d} = c^{a?d}$ denn $\sqrt[d?c]{a} = c^{a?d}$ weil $(c^{a?d})^{d?c} = c^{(a?d)(d?c)} = c^{a?c} = a$

26.) $\sqrt[b?a]{a} = \sqrt[b?c]{c}$ denn $(\sqrt[b?a]{a})^{b?c} = a^{\frac{d?c}{d?a}} = a^{a?c} =$ [illegible] es muss heißen $\sqrt[b?c]{a} = \sqrt[b?a]{c}$ [illegible] 23 und 24 [illegible]

27. $\dfrac{a?c}{b?c} = \dfrac{a?d}{b?d}$ denn $\dfrac{(a?c)(b?d)}{b?c} = (9) = (a?b)(b?d) = a?d$

Hierdurch ist auch in allen diesen Formeln keine Evidenz wie man zu ihnen gekommen ist, sie sind nur gleichsam despotisch vorgelegt worden und allenfalls keine Merkmal gegeben wie man sich überzeugen könnte, ob sie nicht etwa unrichtig waren wir glauben sollen. z. B. ein evidenter Beweis ist folgender:

Daß $a^{\log c} = c^{\log a}$ bei derselben basis b ergiebt sich dadurch nennen wir $\log c = x$ $\log a = z$ so ist $a = b^z$, $c = b^x$ also $a^{\log c} = c^{\log a}$ verwandelt sich zu erst in

$a^x = c^z$ dann in

$(b^z)^x = (b^x)^z$ dann in

$b^{zx} = b^{zx}$ was identisch ist

$a^{\log c} = c^{\log a}$ ist nach Ohm

$a^{c?d} = c^{a?d}$ nun da $a = d^{a?d}$, $c = d^{c?d}$ ist

$$a^{c?d} = (d^{a?d})^{c?d} = (d^{a?d})^{c?d} = a^{c?d}$$
$$c^{a?d} = (d^{c?d})^{a?d} = (d^{a?d})^{c?d} = a^{c?d}$$

Das wäre ein evidenter Beweis für einen gegebenen Satz. wir können aber diesen Satz selbst entwickeln nämlich:

ist $a^{c?d}$ gegeben und es soll in andere Ausdr: verwandelt werden, so ist $a = d^{a?d}$ also

$$a^{c?d} = (d^{a?d})^{c?d} = (d^{c?d})^{a?d} = c^{a?d}$$ mithin

ist $a^{c?d} = c^{a?d}$

Beydes muß man bei Ohm nachlesen.

II Capitel
Allgemeine Summen und Differenzen

§67. 1) d. h. wenn ich z. B. hätte

$$(a-(b-c))+(b-c) = ((a-b)+c)+(b-c)$$

so sind die beyden Ausdrücke gleich ~~sehr~~ weil sie in einen Ausdruck übergehen, ohne daß etwas zu adiren nöthig

$$a = (a-b)+((b-c)+c) = (a-b)+b = a$$

§68 ist $a=b$ so ist $a-m = b-m$ denn nach Definition der allg: Gl: ist ein Ausdruck [illegible] p der zu beyden adirt sie gleich machen soll

d. h. $(a-m)+p = (b-m)+p$ oder sonst zweckmässiger gesetzt

$$(a-m)+m = (b-m)+m$$
$$a = b.$$

So ist 1) $m-a = m-b$ denn

2) $(m-a)+p = (m-b)+p$ oder noch zweckmässiger

3) $(m-a)+(a+b) = (m-b)+(a+b)$ oder

4) $[(m-a)+a]+b = [(m-b)+b]+a$ oder

$$m+b = m+a \text{ oder}$$
$$p+b = p+a$$

denn nach der Def. der allg: Gl: ist ein Ausdr. p. der zu a und b adirt, $a+p$ und $b+p$ in einen und denselben Ausd: übergehen läßt. Man muß also bei $m-a = m-b$ wie bei $a-m = b-m$ wie bei $m+a = m+b$. immer solchen Ausdr: zum dritten Ausdr: wählen damit nach der definition beschaffenheit, nicht $a=b$ übrig bleibe sondern $a+p = b+p$ oder $m+a+p = m+b+p$ d. h. es folgt also $m-a = m-b$ denn $a+b+p$ zu beyden adirt giebt $(m-a)+a+b+p = (m-b)+a+b+p$ oder $m+b+p = m+a+p$ weil beydes einen und denselben Ausd. bildet.

NB Allein da die Gl: 1 allg. formel ist so ist auch die Gl 2 und 3 eine allgemeine. Hieraus ersehen wir aber, daß ich in einer solchen Gleichung Veränderungen anstellen kann, und zwar auch formeln die nur für specielle Fälle gelten, ohne befürchten zu dürfen, daß sie auch allg: gelten? der Verfasser spricht hier dieses [illegible]

~~und~~ indem er §66 in der Def. der allg. Gleichheit gleich die Behandlung anzeigt, als was zur Definition gehörend – Ich würde aber besser zu weis [illegible] daß die formeln der speciellen Fälle auch jetzt gelten, und dann diese Folge-folgen [illegible]. Allein der Verfasser

~~zu §93~~

hat es so angewiesen, daß er die Beweis-methode (d. h. ~~wenn~~ $a=b$, wenn ~~$a+m=b+m$~~) abstrakt als Lehrsatz für ~~speciellen~~ allgemeine Gleichheit beweist und nun auch die speciellen formeln dieser Methode im Sinne der ~~speciellen~~ allg. Gleichheit anwendete und so die Gültigkeit der speciellen formeln auch der allg. erkannte. Die einzige formu-lierung dieser formeln der Def. nöthig ist wenn $a=b$ u. $b=c$ so ist $a=c$. Sie müssten auch diesen im Sinne der allg. Gleichheit beweisen

zu §93

ist $a=b$ so ist $a:m = b:m$, denn wäre $a:m$ nicht gleich $b:m$ so würde $(a:m)-(b:m) = x$ d. h. einer differenz gegen Zahlen nach der Definition
$(a:m)m - (b:m)m = mx$ d. h. nach der Definition

der Diff.

Theile: $a - b = mx$ oder $0 = mx$ da nun m nicht 0 seyn darf so muß es x seyn daher $(a:m) - (b:m) = 0$ daher $a:m = b:m$.

Ebenso kann $m:a = m:b$

denn wäre $m:a \gtrless m:b$ so würde wieder $(m:a)-(m:b) = x$ daher $b(m:a)a - a(m:b)b = abx$ oder $bm - am = abx$ da nun $a=b$ so ist $am=bm$ also $0 = abx$ da nun die Divisoren a u. b nicht 0 seyn dürfen, so muß es x seyn d. h. $a:m = b:m$ werden

III Capitel algebr. Summen

Eine algebraische Summe ist z. B. $5-3-2$ wenn ich mir die Verbind $(5-3)-2$ dabei denke, sie ist ~~[illegible]~~ gem: Summe gleich d.h. $=(+5)+(-3)+(-2)$ weil $+a=a$ und $a+(-b)=a-b$. Da nun

$(+5)+(-3)+(-2)=(+5)+(-2)+(-3)=(-2)+(-3)+(+5)$ also so muss
$5-3-2 \;=\; 5-2-3 \;=\; -2-3+5$ werden, weshalb ich man nur die Differenzbegriffe [illegible].

1. $(5-3)-2=(5-2)-3=(-2-3)+5$ also dann
daß $(5-3)-2$ nicht gleich ist $5-(3-2)$ [illegible] jeder ein. Demnach ist (§ 100)

$$(a-b-c+d)m = \left[(+a)+(-b)+(-c)+(+d)\right]m =$$
$$= m(+a)+m(-b)+m(-c)+m(+d) =$$
$$= (+ma)+(-mb)+(-mc)+(+md) =$$
$$= ma-mb-mc+md$$

Dasselbe gilt vom dividiren.

§ 101

1.) $(a+b-c)+(d-k+f) = a+b-c+d-k+f.$ denn

$$(a+b-c)+(d-k+f) = \left[(+a)+(+b)+(-c)\right]+\left[(+d)+(-k)+(+f)\right] =$$
$$= (+a)+(+b)+(-c)+(+d)+(-k)+(+f) =$$
$$= a+b-c+d-k+f.$$

II $$(a+b-c)-(d-k+f) = \left[(+a)+(+b)+(-c)\right]-\left[(+d)+(-k)+(+f)\right] =$$
$$= (+a)+(+b)+(-c)-(+d)-(-k)-(+f) =$$
$$= a+b-c-d+k-f.$$

$$\text{III)}\ \overbrace{(a+b-c)}^{A}\cdot(a-b) = aa + ab - ac - ab - bb + bc$$

$$\text{IV}\ \frac{a+b+c}{m+n+p} = p + \frac{a+b+c-p\cdot(m+n+p)}{m+n+p}$$

denn $A = \big[(+a) + (+b) + (-c)\big] \cdot \big[(+a) + (-b)\big] =$

$= (+a)(+a) + (+b)(+a) + (-c)(+a) + (+a)(-b) + (+b)(-c) + (-c)(-b)$ [illegible]

$= aa + ba + ca - ba - bb + bc$

Das IV eben so.

Cap IV

§ 118.

ist $a = b$

wenn = die allg: Zeichen bedeutet so ist auch

1) $a \pm m = b \pm m$ denn $(a \pm m)p = (b \pm m)p$ giebt

$$ap \pm mp = bp \pm mp$$

Da nun ap und bp nach der Def. einen Ausdruck geben, so geben ich auch $ap \pm mp$ und $bp \pm mp$

2) $m - a = m - b$ denn $(m-a)p = (m-b)p$ giebt

$$mp - ap = mp - bp$$

3) $am = bm$ denn $(am)p = (bm)p = (ap)m = (bp)m$

4) $a:m = b:m$ denn $(a:m)\cdot mp = (b:m)mp$ giebt

$$ap = bp$$

5) $m:a = m:b$ denn $(m:a)abp = (m:b)abp$ giebt

$$m(bp) = m(ap)$$

§ 126.

daß $a^1 = a$ erhellt, weil $a^1 = a^{(p+2)-(p+1)} = \frac{a^{p+2}}{a^{p+1}} =$

$$= \frac{a^p.a.a}{a^p.a} = a$$

daß $a^0 = 1$ erhellt weil $a^0 = a^{p-p} = \frac{a^p}{a^p} = 1$

daß $1^q = 1$ wenn $q = m-n$ erhellt denn

$$1^{m-n} = \frac{1^m}{1^n} = \frac{1}{1} = 1$$

daß $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ wenn $m = p-q$ erhellt.

denn $a^{-m} = a^{0-(p-q)} = \frac{a^0}{a^{p-q}} = \frac{1}{a^{p-q}} = \frac{1}{a^m}$

Anmerk: man kann den Satz nicht so beweisen daß weil $m = p-q$ ist: denn $a^{-m} = a^{-p+q} = a^{q-p} = \frac{a^q}{a^p}$ denn da $m = p-q$ d. h. einer Diff. zweyer Größen, so soll $q-p$ keine werden. Beweis.

$(-a)(-b)(-c)\ldots\ldots = (-1)^n abc\ldots\ldots$ ist eine gute Bezeichnung nämlich ist n eine gerade Zahl so ist $(-1)^n = 1$ also das produkt $= abc$ ist n ungerade Zahl so ist $(-1)^n = -1$ also das produkt $= -abc$. Kurz also zu schreiben

$(-a)(-b)(-c)\ldots = \pm abc$ ... n Factoren mit dem Zusatz daß + gilt wenn die Anzahl der Factoren gerade − aber wenn sie ungerade ist, mithin [illegible] bestimmt genau Zeichen.

Ferner $(-a)^n = (-1)^n \cdot a^n$ wenn n eine Diff $p-q$ bedeutet denn

$(-a)^{p-q}$ wird $\dfrac{-a^p}{-a^q}$ und $(-1)^n \cdot a^n = \dfrac{-1^p \cdot a^p}{-1^q\ a^q}$

und $-a^p = (-1 \cdot a)^p = -1^p \cdot a^p$ und

$-a^q = (-1 \cdot a)^q = -1^q \cdot a^q$

Auch dieser Formel hat für sich daß $\pm$ Zeichen nicht vorgeschrieben [?] den Beweis

Endlich $-a = -1 \cdot a = (-1)^1 \cdot a$

Beweis der Formel ist das
$(-a)(-b)(-c)\ldots = (-1 \cdot b)(-1 \cdot a)(-1 \cdot c)\ldots$
= da die Ordnung der Multipl. beliebig ist =
$(-1)^n \cdot abc\ldots$

V Capitel Von den Theilbarkeit(?)

§130

1) Die Summe und die Differenz zweier durch m theilbaren Zahlen ist ebenfalls durch m theilbar. Denn soll $(a\pm b)$ durch m theilbar seyn so muss $\frac{a\pm b}{m}$ eine ganze Zahl geben. Nun ist $\frac{a\pm b}{m}=\frac{a}{m}\pm\frac{b}{m}$ da nun a und b durch theilbar sind so geben sie $\frac{a}{m}$ $\frac{b}{m}$ ganze Zahlen daher auch ihre Summe und Diff ganze Zahlen giebt.

2) Soll ab durch m theilbar seyn, wenn b durch m theilbar ist so muss $\frac{ab}{m}$ eine ganze Zahl geben. Nun ist $\frac{ab}{m}=\frac{b}{m}\cdot a$ d.i. eine ganze Zahl durch ganze Zahl daher auch das Prod eine ganze Zahl.

3) Dann soll m durch 1 theilbar seyn so muss $\frac{m}{1}$ eine ganze Zahl geben welches auch ist.

4) Denn $\frac{m}{m}=1$, und da 1 die kleinste Einheit(?) ist so ist m zugleich(?), der größte Theiler.

5) Ist c durch b und b durch a theilbar so ist c durch a theilbar, denn da b durch a theilbar ist so ist eine ganze Zahl x so daß $xa=b$ da ferner c durch b theilbar ist so ist c auch durch xa theilbar

Evidente Lehrsätze(?)

Denn die Summe oder Diff wird dividirt, wenn jedes einzelne Glied dividirt, sind also einzelne Glieder theilb: so ist auch die S. und Diff.

2

Denn das Product wird dividirt wenn man einen Factor dividirt, ist also jeder(?) Factor theilb: so ist auch das Prod: theilbar.

3.

folgt aus 2) weil $m=1.m$ und 1 ist durch 1 theilbar

5

Denn b ist das Theilursache(?) von a, und c das Theilursache(?) von b also auch das Theilursache(?) von a

~~[illegible] $\frac{c}{a}$ [illegible] $\frac{c}{b}$~~
~~x und $\frac{b}{a}=y$ so ist~~
~~x das Theilursache(?) von~~
~~z [illegible]~~

14. d. h. $\frac{c}{xa}$ oder $\frac{c:a}{x}$ giebt eine ganze Zahl z so daß $x\cdot z = c:a$ da nun x und z ganze Zahlen sind so ist $x\cdot z$ auch ganze Zahl mithin auch $c:a$ eine ganze Zahl d. h. c durch a theilbar

weil nun a ein x mal kleinerer Theiler von c ist als b, so ist auch $\frac{c}{a}$ das x fache von $\frac{c}{b}$ oder x ist hier $\frac{b}{a}$ mithin ist auch $\frac{c}{a}$ das $\left(\frac{c}{b}\text{ fache}\right)$ von $\frac{b}{a}$

Es ist ferner $\frac{c}{a}$ durch $\frac{c}{b}$ und durch $\frac{b}{a}$ theilbar, denn $\frac{\frac{c}{a}}{\frac{c}{b}} = \frac{c\cdot b}{a\cdot c} = \frac{b}{a}$ also eine ganze Zahl

ferner $\frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c\cdot a}{a\cdot b} = \frac{c}{b}$ auch eine ganze Zahl.

b

dann ist $\frac{c}{a}$ das z·x fache von $\frac{c}{b}$ so ist a x mal kleiner als b mithin b das x fache von a

6) ~~Dann soll b durch a theilbar sein so muss $\frac{b}{a}$ eine ganze Zahl seyn d. h. b x mal grösser als a oder $b = xa$~~
so ist $\frac{c}{a}$ durch $\frac{c}{b}$ theilbar daher $\frac{c}{a} : \frac{c}{b}$ oder $\frac{b}{a}$ ist eine ganze Zahl gleich

7) ist wörtlich der 5 Fall (der Theil. weil c jede Zahl repräsentirt).

8) ist eben so der 5te Fall.

8

dann b ist das Vielf. von m, n, p, etc also $\frac{c}{m}, \frac{c}{n}, \frac{c}{p}$ sind Vielfache von $\frac{c}{b}$.

9) und 10) ergeben sich unmittelbar aus 2 und 4. zusammen.

Man kann noch zu sehen daß $a^p \pm b^p$ durch m theilbar ist wenn a u b durch m theilbar sind, welches sich aus 1 und 2 ergiebt u. s. f.

§ 132.

1) ist n gerade Zahl d. h. $= x2$. so ist. $2n$ $(x2)\,2$ also auch eine gerade Zahl
ist n ungerade Zahl also $x2 \pm 1$ so ist $2n = 2(x2 \pm 1)$ eine gerade.

2) d. h. $\frac{2n+1}{2m}$ kann nie eine ganze Zahl geben wenn auch $\frac{2n}{2m}$ eine ganze Zahl ist

weil $\frac{2n+1}{2m} = \frac{2n}{2m} + \frac{1}{2m} =$ ~~[illegible]~~ ist nicht

nicht 0 und doch daraus ab muß sein
dann durch 0 wird nichts dividirt, so ist nie $\frac{1}{2m}$ eine ganze Zahl
also $\frac{2n}{2m} + \frac{1}{2m}$ nie eine ganze Zahl. Weil nun

$\frac{2m}{2n+1} = \frac{m}{2n+1} \cdot 2$ ist nun $\frac{m}{2n+1}$ eine ganze Zahl
so bleibt sie auch ganz wenn sie mit 2 multiplicirt. ~~Evidenter Beweis.~~

~~$\frac{2n+1}{2m} = \frac{2+2+2+2 \ldots\ldots +1}{2+2+2+2 \ldots 2m \ldots}$~~

3) $2n \pm 2m = (n \pm m)2 = x2$

$2n . 2m = (n . m2)2 = y2.$

4) $(2n+1) \pm (2m+1) = 2n+2m+2 =$

$(n+m)2$ ~~$+2 = x2+2 = (x+1)2$~~ $= z2$

Hieraus auch erhellet daß das 1 mahl ... die ungerade Zahl allemahl bleibt bei adiren, gerade zahl bei abziehen gegeben

$(2n+1)-(2m+1) = 2n-2m = (n-m)2 = y2$

ferner

$(2n+1)(2m+1) = (2n+1)2m + 2m+1 =$

$(2nm+m)2 + 2m+1 = (2nm+m+m)2 + 1$

$= x2 + 1$

Daß das ungerade gerade mal genommen wird gerade, oder noch 1 mal dazu genommen, wird ungerade.

5) $2n \pm (2m+1) = 2n \pm 2m \pm 1 =$

$= (n \pm m)2 \pm 1 = 2z \pm 1$ oder

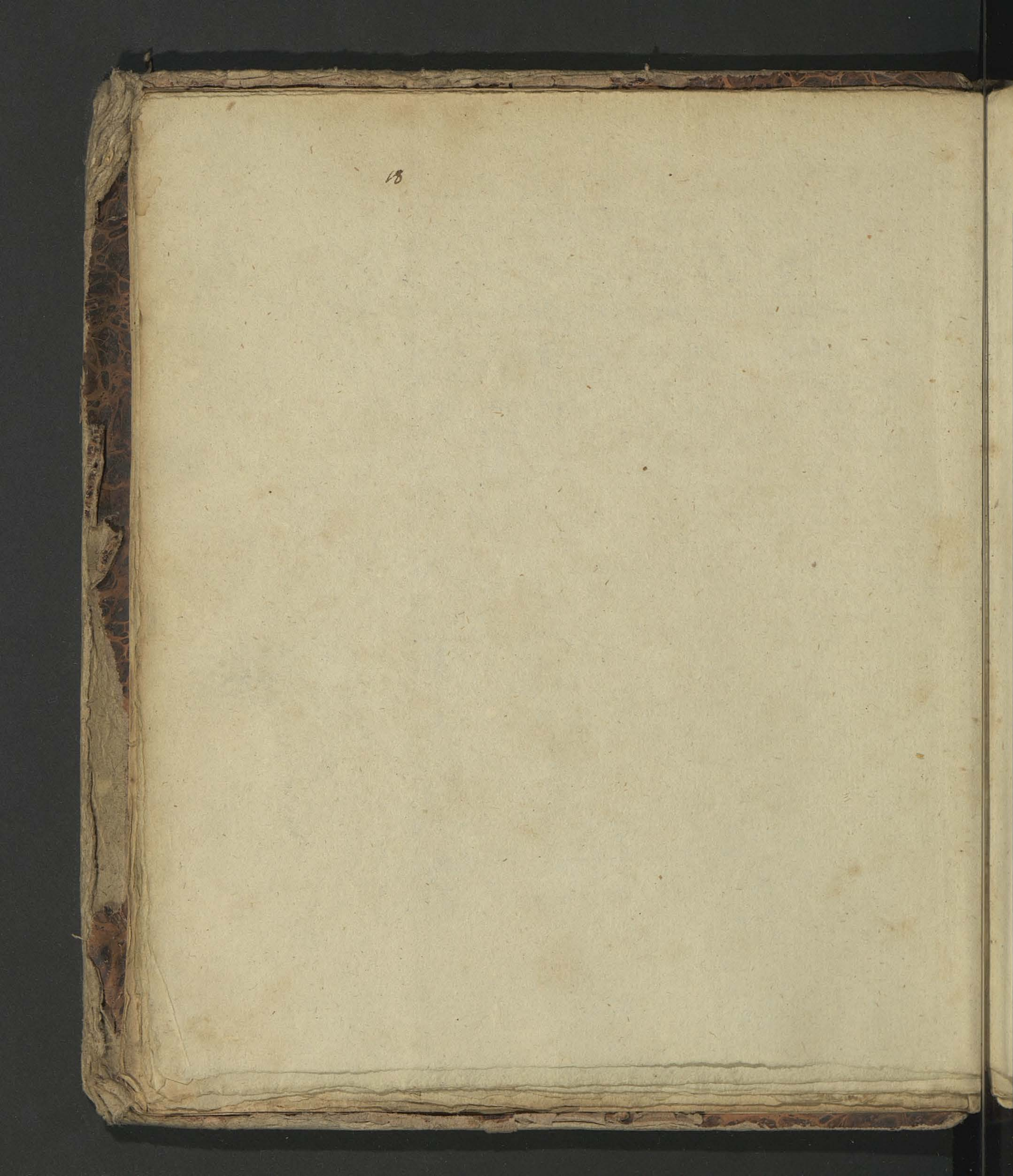
$2n . (2m+1) = 2m . 2n + 2n =$

$(m . 2n + n)2 = z2$

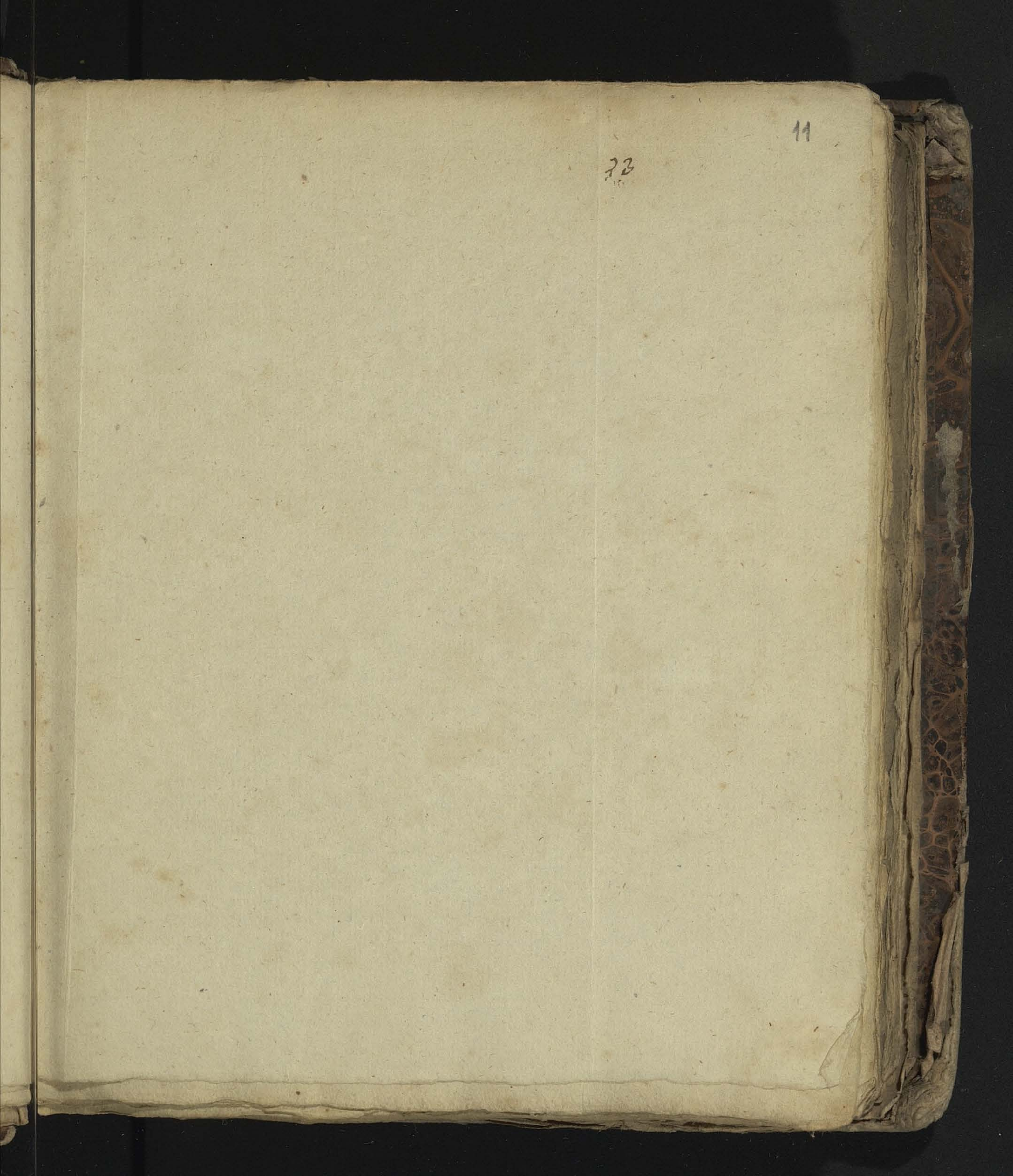
facient wird es daß bei Addit 1 über-
flüßig bleibt. bei Subtraction aber
so nehme $m = m-2$

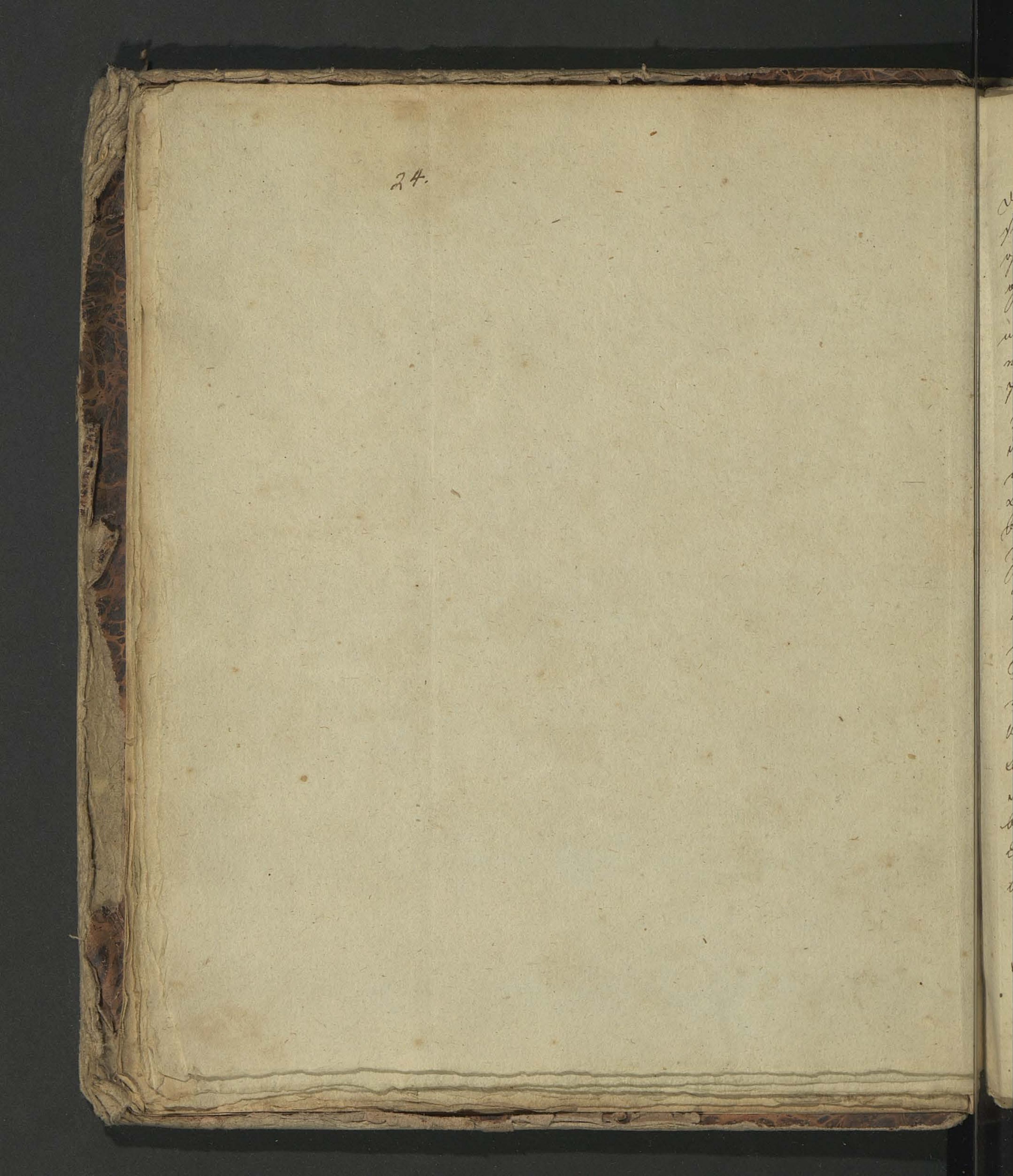
$$\frac{\begin{aligned} m &= m-2 \\ n+1 &= n+1 \end{aligned}}{m-(n+1) = (m-n)-3 = (m-n-2)-1 = a-1}$$

bei multiplic aber wird das grade durch
das grade auch gerade, und das
gerade nach einmal genommen
gibt wieder gerade



18





durch den Begriff der Differenz Potenz ergeben
sich sogleich die Bedeutungen von a^1, a^0, a^{-n}
ohne allen Zweifel, es ist nur noch zu zei-
gen, wenn man mit Potenzen verbindet
ob also die Formeln des Potenziren der Zahlen
auch für Differenz Potenzen gelten, dieß
wird sich zeigen, wenn man in den Formeln
für Potenzen statt m $(\alpha-\beta)$ statt n $(\gamma-\delta)$
setzt. denn da ergiebt sich die Identität
der Gleichungen oder Formeln. Also statt Potenzen
muß ich Quotienten potenzen setzen.
Habe ich einen Differenz Quot. $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$ der ist der
allgemeinste. Ist er selbst Differenz ganze
Zahl so ist er entweder ganze Zahl oder 0
oder subtractive Zahl. Ist er keine Diff.-ganz Z.
dann ist er eine gebrochene Zahl. die
entweder ~~posit~~ additiv oder subt. sein kann
So daß man 5 specielle Formen giebt. Da
wir nun die Bruchzahlen Potenz, und Diff.-
ganze Zahl haben, so ist nun noch einen
Begriff für gebrochene Exponenten zu geben
also muß man den Begriff für a^m ge-
ben wo $m = \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$, denn wird solcher
Begriff der allgemeinste, weil $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$
alle 5 Formen der Zahl umschließt. Weil
die solche Potenzen in Analysis nie gebraucht
werden, so begnügen wir uns mit den
Diff.-Potenzen.

Die nächste Anwendung ist auch als praktisch Rechnen. Sie haben wir keine Logarithmen Zeichen, man muß also einzelne Zeichen von einander unterscheiden. dazu dienen die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. wo ich durch 2 die Summe 1+1, durch 3 die Summe 2+1 etc. bezeichne. Der Reihe der Zahl 9 folgt 9+1 und dies bezeichne ich durch Z, denke mir dann das Z potenzirt zur 2, 3, 4, etc pot: und erhalte Z^2, Z^3, Z^4 etc
So kann ich bilden $6Z^4+4Z^3+7Z^2+3Z+8$. Habe ich das zusammengesetzt, dann setzt ich ich habe gezeigt für die obere Summe schreibt man der Kürze wegen 64738 denken nach aber dabei das obere, und kennen es noch beliebige Weise. So denkt man sich unter 409, $4Z^2+0Z+9$ oder $4Z^2+9$. da $10 = 1Z+0 = Z$ so kann man statt Z künftig 10 setzen

Um nun 758 zu 243 zu addiren wird die Summe 758+243 und dann werden die einzelnen Theile nach bekanntem Gesetz addirt. So ergiebt sich auch die Subt. und Multipl:

Was das Dividiren anbetrifft so schafft dieses doch stets $\frac{A}{B} = x + \frac{A-Bx}{B}$ die multipl. auch beyden darstellen. So sind die Gl. identisch, und ein Quotient kann in eine Summe verwandelt werden, wenn man zum ersten Summanden irgend was nimmt u. s. w.

Statt x nehmen wir natürlich die Zahl die und die bequemste scheint. und der zweite Summand als Quot: kann wieder in eine Summe verwandelt werden u. s. f.

Die Irrationalzahl kann kein Theil einer ganzen Zahl seyn, weil wir mit unbenannten Zahlen zu thun haben. Also unsere Theorie entstanden gebr: Zahlen als der allg: Division oder erweiterte Differenz Quotient, der keine Zahldifferenz zum Resultat gibt. Da nun davon ein Quotient ist, so wird er behandelt nach den bekannten Formeln der Quotienten die Decimalbrüche sind gemeine Brüche, deren Nenner eine Potenz von 10 ist, und dem Bruch bequeme Form geben, wenn der Z. der nun in Nenner: also ein Quotient, so gehen auch die Decimalbr: welche Formen der Quotienten sind so ist die ganze Zahlenlehre im ganzen verfahren nach den bekannten Formeln

Die Regeln stehen der Potenz gegenüber, so wie Div: der Mult. Ich denke mir eine minus a eine ganze ~~oder gebr. Zahl~~ oder absolute Zahl dieselbe minus b. so ist wenn $a > b$ so ist $a^2 > b^2$ denn ~~[illegible]~~

$a^2 = aa$ und $b^2 = bb$ so ist weil $a > b$ $aa > ab$ und $ab > bb$ daher

auch $aa > bb$.

Anm.

Daß ich $-b$ eine subtr. Zahl nenne, ist deshalb weil, da b alles seyn kann, so kann auch es seyn -3 und $-(-3)$ wird also auch subtr aber keine negative die negat: Zahl ist also weil eine subtr: Theil weil es ein Glied ist das an sich absolut nur mit $-$ Zeichen versehen. Die subtr: Zahl hat das Glied allgem: wenn der nun die subt: Zahl auch negative bedeutet, so wird eine Lehre der negativen Zahlen übrig. So ist es auch mit den additiven und positiven Zahlen. Wenn man sagen wollte es ist weil $-(-3) = +3$ folglich kann $-(-3)$ keine subtract: sondern additive Zahl, so müßte, weil $5+3 = 10-2$, $10-2$ eine Summe seyn, die Benennungen beziehen sich nicht auf die Bedeutung sondern auf die Form. $a > b$ wenn $a-b$ eine absol. Zahl = ist, daher können jede subtrahirt werden, wenn a und b allgemein sind

Denn $a^3 = a^2 \cdot a$ und $b^3 = b^2 \cdot b$
da nun $a^2 > b^2$ und
$a > b$
so ist $a^2 \cdot a > b^2 \cdot a$ und
$a^2 \cdot b > b^2 \cdot b$

also $a^2 \cdot a > b^2 b$ oder
$a^3 > b^3$

sein so ist $a^3 > b^3$ u. s. f. Diese Sätze gelten aber nur, wenn wir nur absolute ganze Zahl haben. Nun ist die Frage so zu sagen was meint $\sqrt[m]{a}$, wenn a eine ganze absolute Zahl oder auch eine ~~ganze~~ gebrochene absol. Zahl bedeutet, eine Zahl ganz oder gebrochen, die wenn man sie mit m einer ganzen absol: Zahl, potenzirt, a wieder giebt, heißt die Wurzel z so ist $a = z^m$. Es entsteht nun die Frage hat die Potenz alle Wurzel nur eine Zahl? Sobald $a > b$ ist auch $a^2 > b^2$, also $a^m > b^m$ sobald a und b absolute ganze Zahl: sind, also haben zwei verschiedene ~~Potenzen~~ Zahlen immer verschiedene Potenzen, daher kann eine Potenz nicht 2 verschiedene Wurzeln haben. Die zweite Frage ist, giebt es auch wirklich immer eine solche Wurzel? Ich denke mir die Zahlen von 0 an bis unendlich stetig auf einander folgend, und potenzire jede Zahl mit m. so werden die Potenzen auch eine stetig steigende Reihe geben ~~so folgt möglich nur ich eine Potenz~~ Man könnte nun meinen daß doch zwei solche auf einander folgende Potenzen nicht solche Lücke lassen können in der Wurzel. Allein das wird sich aus folgenden Beispiele sehr deutlich sehen zeigen.

Nehme ich $\frac{1}{2}$ so kann $\frac{1}{2}$ ausdrücken $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{100}{200}$ $\frac{10000}{20000}$ etc. nehme ich nun $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{8}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{99}{200}$ $\frac{9999}{20000}$ so nähere ich mich immer dem $\frac{1}{2}$ so nahe wie ich will, ich bekomme aber nie $\frac{1}{2}$. So stehen nun also zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ und so zwischen jeglichen zwei Zahlen so zwischen $\frac{9999999999}{999999999}$ noch unendlich viele Zahlen statt finden, so daß man niemals im Stande ist die nach 1 nächst folgende Zahl anzugeben, denn mag sie noch so klein seyn, so ist immer noch kleiner und diese Zahl muss nur im Moment des Verschwindens gedacht werden. Denkt man sich nun die Zahlen in solcher Stetigkeit, und ersetzt man ... so werden sie eine stetige Reihe von Zahlen bilden

Irrational ist jede Zahl die wirklich ex. in der Idee, aber es keine Zahl gibt, die in endlichen Zahlen hingeschrieben durch welche diese Zahl identisch wären

So ist in der Theorie kein Unterschied zwischen rationalen und irrationalen. In der Praxis aber ist ein Unterschied. die Wurzel [illegible] zwar, die irrationale kann ich nicht [illegible] beschreiben, weil die Ausdrücke ins unendliche gehen, also eine unendliche Zeit nöthig wäre, und wir uns nur mit Näherungswerthen begnügen müssten

Die [illegible] 5 Grössen schon recht die nicht aufgehen können imaginär, weil [illegible] Symbolisirung zu nehmen ist.

Unter Log: a für die Basis p denke ich mir die Zahl die man wenn die Basis p [illegible] ~~die Zahl z~~ sehr hoben wird a heraus kommt d. i. $p^{(\log^p a)} = a$ und der Gegensatz des Logar: und Potenzirens ist derselbe wie der zwischen Add. und Subt. so auch der Gegensatz zwischen Log: und Radication. Allein da aus $\log^p a = z$ folgt daß $a = p^z$ und z also nur eine solche Zahl sein kann welche nichts anders als ~~Differenz Exponent~~ eine absolute Zahl, so müssen wir erst das Potenziren gründlich kennen und dies giebt das Wesen der Analysis.

Die wichtigste Aufgabe ist nun die jetzt folgt. die den Hauptinhalt der Algebra ausmacht. das Schwierige man zusammenfassen der Aufgabe ist die.

Jede Gleichung ist zwei verschiedene Ausdrücke die eine Zahl bedeuten, abstrahirt daß die Folge der Operation [illegible] und die [illegible] identisch ist, wir geben [illegible] einerlei. die Richtigkeit der Gleichung wird also die, daß man ich

irgend was setzen für den Buchstaben was ich will, die Gleichung aber dieselbe bleibt. Wird für einen Werth die Gl. unrichtig, so ist sie überhaupt unrichtig, weil wir uns um die Bedeutung der Buchstaben nicht bekümmert haben z. B. $a-(a-b)=b$ ist richtig weil zu beyden $(a-b)$ addirt, Identitaet giebt setz ich aber $a-z=b$ so ist die Gl: unrichtig weil, statt z, einen willkührlichen setzen kann und unrichtige Resultate kommen. Es entsteht also die Aufgabe: Wenn ich eine Gleichung habe wo wenigstens ein Ausdruck allg: ist, und die wir Bestimmungsgleichungen nennen, und fragen was muß man für einen allg Ausdruck setzen damit die Bestimmungsgleichung zur identischen werde. Da nun die Identischen Gl: die richtigen sind, so werden die B-Gl erst dann richtig, wenn man für jeden allg. Ausd: das setzt, was die Gl zur Identitaet bringt. Es ergiebt sich von selbst daß man mehrere allg. Ausd: die Werthe annehmen kann und so entstehen Gl. von mehr: Unbek: Die Gl: von einer Unb: erscheinen in folg. Form

$$ax+b=0$$
$$ax^2+bx+c=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}\ldots+px+q=0$$

Was die einfachen Gl: anbetrifft die werden einfach gelöset.

1) $ax+b=0$ daher

2) $ax=-b$

3) $x=\frac{-b}{a}$

ist nun 1) richtig so ist 2) richtig, so ist 3) richtig aber wir müssen auch ob 1) richtig war, daher wenn 3 richtig ist, und es ist richtig dan $-\frac{b}{a}=-\frac{b}{a}$ oder 2 aus 3 entsteht und wenn man durch a multipl. so ist 2) wirklich richtig und 1 wirklich richtig, wenn x den Werth $-\frac{b}{a}$ hat.

Ist $a=0$ so gilt diese Auflösung nicht, denn wir haben Gleichungsgestallt daß ein Quotient mit 0 div: nicht denkbar ist. Man bemerkt aber das Zeichen nicht denn ist $a=0$ so ist $ax=0$ also 1) und $b=0$ und ist $b=0$ so ist die Gl. ident. ist aber nicht so ist die Gl. [illegible]

haben die Gl: eine der formen so heißen sie algebraische, haben sie andere form so heißen sie transcendent. und so zertheilt Algebra in 2 Theile in die niedrige und höhere oder Analysis obgleich die [illegible] Algebra und ein Theil der Analysis ist. unter den algebr: verstehen einfache quadr: cubische höhere Gl: etc.

Das wichtigste ist Ordnen d.h. die Reduction der Gl: auf die Form oder den zweck daß solche form möglich ist. was durch Aufheben, das Annehmen und Division geschieht. Durch Ordnen sieht man zu welcher Classe die Gl: gehört.

Die einfachen Gleichungen werden einfach gelöst, wenn man b auf andere Seite bringt dann durch a dividire.

Die reine qu: Gl. $ax^2+c=0$ geben einfach $x^2=-\frac{c}{a}$, da wir nun den Satz nicht statt daß wenn $a=b$ ist auch $\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{b}$, und der Satz aber sonst falsch ist, so müssen wir uns auch der Ausdruck zurücksehen und den Fall erst wo man: $-\frac{c}{a}$ ist entweder = einer absolut: Zahl oder nicht. Im ersten Fall giebt es eine Zahl die mit 2 potenzirt $-\frac{c}{a}$ giebt also $\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2=\frac{c}{a}$

daher $x^2=\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2$ oder $x^2-\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2=0$

daß nun $\left(x+\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x-\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)=0$ weil dann [illegible] zerlegt so wird die Gl: ident. wenn nur der factor 0 ist. Der erste wird zu 0 wenn $x=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$; ist x nicht $=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ dann giebt der factor eine absolute Zahl, dividirt man durch den factor [illegible]

so wird $(x-\sqrt{-\frac{c}{a}})=0$ also die Gl. wird dann
wenn $x=\sqrt{-\frac{c}{a}}$, daher kann hier x dergestalten
Werth haben. Allein das gilt nur wenn $-\frac{c}{a}$ eine abs Zahl giebt die
Hier kommen wir also auch den Punkt unseren
Begriffe zu zweifeln: wir sich wissen wir zu
fragen, sind diese Ausdrücke von der Art
oder nicht. Das Zweifelhafte ist die Wurzel
und vorläufig die √ festzustellen im Allgemeinen
[Und es ergiebt sich auch hieraus, daß der allg:
Begriff der ist, wenn a irgend eine Zahl ist
so ist $\sqrt{a}$ die Zahl welche zu quadrat erhoben
a giebt. d. h. $(\sqrt{a})^2=a$. Da wir nun gesehen
haben daß es dergestalten Werth giebt der
zum Quadr: erhoben a giebt
— und es giebt auch nicht mehr solcher auch allg
Werthe weil wir keinen Fall nach-
gewiesen haben indem wir logisch schließen
ob ist es oder aber ist nicht es. —
daher muß die Regel immer mit ± genommen
Werthen damit sie jeden Fall in sich begreifen.
Und hier liegt den Unterschied zu früheren, daß
wenn a−b eine Zahl ausdrückte die zu b addirt a
giebt, so gab es nur eine solche Zahl desgleichen
bei Quot: die Diff: wenn sie allg ist giebt weder
pos: noch neg: Zahl dann sie ist begrenzt, der allg Quot.
ist weder ganze noch gebroch: Zahl dann er ist begrenzt
so ist allg Wurzel weder imag: noch reell da
sie ist begrenzt.

ist $-\frac{c}{a}$ keine abs. Zahl, so giebt es keine Zahl die mit sich multipl. $-\frac{c}{a}$ giebt, und das war Begriff der Wurzel.

[dasselbe fand schon statt bei Diff u Quot und wir mußten Begriff lassen auch allg. besonders müßten wir die Begriffe der Diff und Quot. zweifeln meinen.

Da √ ist zweideutig, stellt also beyde Werthe vor, ich muß also im allg: beyde Werthe setzen daher $\sqrt{1}$ ist nicht 1 sondern ± 1, daher $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$ nicht gleich a sondern $\pm a$. daher $p\sqrt{a} \pm q\sqrt{a}$ nicht $=$ $(p \pm q)\sqrt{a}$ sondern $\pm(p \pm q)\sqrt{a}$

Die Formeln die wir früher aufgestellt haben gelten auch hier nur mit Einschränkung es hat die Identität der Quadratwurzeln nicht die [illegible] Gleichheit der Eigenschaften z. B. $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}$ nach unserem [illegible] vorigen [illegible] giebt $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ als strenge [illegible] ist der Gl. gut. Denn da $\sqrt{ab}$ deutet den Ausdruck der mit 2 potenz ab giebt ich habe zu ab $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ dargiebt –

$$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=ab$$

Allein $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ deutet bloß die Identität der Eigenschaften nicht das Werthsein, denn, daß wenn ich statt $\sqrt{a}$ irgend einen der 2 Werthe und statt $\sqrt{b}$ eben so nehme, allemal herauskomme irgend einer der Werthe von $\sqrt{ab}$ gleich ist z. B. $\sqrt{a}=2$ $\sqrt{b}=-3$ $\sqrt{ab}=6$ so wäre also
$2\cdot -3=6$.

Wir bekommen nun eine neue Classe der Zahlen die man die imaginäre nennen nämlich $\sqrt{-a}$ d. h. eine Zahl die nicht eine der 5 früheren Ausdrücke ist.

Auch dieser Fall ist enthalten in allgemeinen: Regel; und lässt sich nach denselben, wenn die gehörig behandelt sind.

Wir zeigen nur noch für negat: Größen nicht geltend. wenn sagt $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}$, was unrichtig ist. sagt $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=+\sqrt{ab}$ was auch unrichtig ist.

Wir wissen $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}$ Was auch kann a, b seyn was es will also auch $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=\sqrt{(-a)\cdot(-b)}=\sqrt{ab}$ wo jeder der beyden Werthe $\pm$ es noch seyn kann. Und nur die Anwendung zeigt, welchen Werth man nehmen muss. z. B. $\sin x = a$ ist gegeben, man soll cos finden. der $\cos x=\sqrt{1-a^2}$ Frage ist nun welcher Werth der Wurzel genommen ist, ist unbest. doch hängt vom $\angle x$ ab ist er spitzig so weiß ich der cos ist posit. und ich nehme den posit: Werth der $\sqrt{}$ und ist $\angle$ stumpf so muss die $\sqrt{}$ neg. genommen der allg. Calcul muss sich hüten etwas zu thun was im speciellen nicht vorkommt

denn $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}=\pm\sqrt{-4\cdot-9}=\sqrt{36}=+6$ weil weil $\sqrt{}$ nach jeder Größe positiv ist. Dagegen liegt -4 ist $4\cdot-1$ und $-9=9\cdot-1$ also $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}=2\sqrt{-1}\cdot3\sqrt{-1}=6\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=6(\sqrt{-1})^2=6\cdot-1=-6$

Das letzte beruht in der Voraussetzung dass $(\sqrt{-1})(\sqrt{-1})=(\sqrt{-1})^2$ weil es $=$ ist $\pm(\sqrt{-1})^2$

Wir kehren zu alg: Gl: Ist $ax^2+bx+c=0$ eine quadr: Gl: so wird sie in einer verwandelt.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=0$$

denn $ax^2+bx+c=0$ ist $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ und

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=x^2+\frac{2xb}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

Wir wollen nun die Potenzen und Log: untersuchen, wozu doch nöthig ist was folgt.

Das Wesen der Analysis ist die Kenntniss der Verhältnisse der Zahlen zu einander und alles was die Analysis lehrt läuft im 1 Capitel 1 Theil des Systems.

Von Facultäten.

Denkt man sich eine Zahl a (was aber allgemein ist eine Summe) dann die Zahl a+d dann a+2d; a+3d d.h.

$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d \ldots\ldots\ a+(m-1)d$

das ist eine arith: Progression das letzte Glied heißt das m^{te} Gl:† wie man die Theorie [illegible] letzten Cap. [illegible] des Systems.

Multiplic. man die Zahlen durcheinander

$(a)(a+d)(a+2d)\ldots\ldots[a+(m-1)d]$

die Factoren sind ungleich, für a d m bekannt so sind die factoren gleich. das ganze Product ist

$a^{m|b}$ durch a stehen m diff: b † das ist die Facultät

die Formeln der Facultäten sind.

I $\quad a^{m|d} = [a+(m-1)d]^{m|-d}$ die Formel erklärt sich daß wenn die Grundform [illegible] und lehrt wie man eine Facult. mit ~~posit~~ addit diff in eine [illegible] der ~~diff:~~ subtr: diff [illegible] ‡

II $\quad a^{m+n|d} = a^{m|d}\cdot(a+md)^{n|d}$

denn a^{m+n} ist ein Product von m und n factoren wo ein jeder factor um d größer wird. [illegible] $a^{m|d}$ bedeutet ein Product von m factoren wo jeder um d größer wird $(a+md)^{n|d}$ bedeutet die übrigen n factoren. denn da das letzte Glied von m factoren $= [a+(m-1)d]$ so ist das folgende Glied $(a+md)$ das nächst folg. $[a+(m+1)d]$ u. s. f. [illegible] $a^{m|d}$ [illegible] die m fact: [illegible] so muß $(a+md)^{n|d}$ die übrigen [illegible]

die Formel lehrt wie man die Facult. mit einander multipl.

cf. N.o 93.

† deshalb soll [illegible] letzten [illegible] weil ich [illegible] folgendes Glied denken kann

a ist beliebig m [illegible] d diff: m [illegible] ganze Zahl [illegible] facult: heißt ganze facult:

† es soll eigentlich [illegible] ein Product, [illegible] m factoren giebt, wovon jeder a [illegible] jeder folgende um d größer wird d.h. zu welchem d addirt wird, wenn d an sich [illegible]

‡ wenn [illegible] posit: diff: in eine negat: [illegible] verwandeln [illegible] d [illegible] seyn kann, so ist positiv und neg: gleich

Dass in der formel I $(a+(m-1)d)^{mI-d}$ nichts anderes ist als die factoren selbst von hinten gelesen [illegible] man nur sie multipliciren

denn $(a+(m-1)d)^{mI-d} =$

$$=(a+(m-1)d)(a+(m-1)d+(-d))(a+(m-1)d+(-2d))\ldots\ldots(a+(m-1)d+((m-2)\cdot -d))(a+(m-1)d+((m-1)\cdot -d))$$

welches giebt $(a+md-d)(a+md-2d)(a+md-3d)\ldots(a+d)\,(a)$

so dass also die ersten ausdrücke von a^{mId} die letzten sind in $(a+(m-1)d)^{mI-d}$

Lehrsatz

Sind $m\ n\ p\ q$ absolute ganze zahlen und >1 und $m-n=p-q$ so ist.

$$\frac{a^{mId}}{(a+(m-n)d)^{nId}}=\frac{a^{pId}}{(a+(p-q)d)^{qId}}$$

denn ist $m=p$ so ist weil $m-p=p-q$ auch $n=q$ und dann ist die Richtigkeit der Gleichung augenscheinlich. Ist aber $m=p+x$ so ist auch $n=q+x$ und

$m-n=p-q$
$m-p=n-q$
ist $m=p$ so ist $0=n-q$ also $q=n$

a^{mId} bedeutet, dass es x factoren mehr hat als a^{pId} und zwar die factoren

$a(a+d)(a+2d)\ldots\ldots(a+(p-1)d)$ hat sie gemein und folgende $(a+pd)(a+(p+1)d)(a+(p+2)d)\ldots((a+(p+x-1)d))$ übrig

oder es hat übrig mehr $(a+pd)\ldots\ldots(a+(m-1)d)$ weil $p+x=m$.

Nun hat auch der Nenner $(a+pd)\ldots(a+(m-1)d)$ mehr factoren als der Nenner links.

durch sind die gemeinschaftlichen Factoren | dann sind die übrigen Factoren

Denn $(a+(m-n)d)^{n|d} = [a+(m-n)d][a+(m-n)d+d]\dots[a+(m-n)d+(q-1)d][a+(m-n)d+qd]\dots[a+(m-n)d+(q+x-1)d]$

es ist aber $a+(m-n)d+qd = a+md-nd+qd = a+md-qd-xd+qd =$

$= a+md-xd = a+(m-x)d = (a+pd)$

und $a+(m-n)d+(q+x-1)d = a+md-qd-xd+qd+xd-d = (a+(m-1)d)$

daher heben sich im Zähler und Nenner die gemeinschaftlichen Factoren $(a+pd)\dots\dots(a+(m-1)d)$ und es bleibt

$$\frac{a^{p|d}}{(a+(p-q)d)^{q|d}}$$

Daß auch Formel II $a^{m+n|d} = a^{m|d}\cdot(a+md)^{n|d} = a^{n|d}\cdot(a+nd)^{m|d}$

erklärt ein Beispiel $3^{2+4|1} = 3^{2|1}\cdot(3+2)^{4|1} = 3^{4|1}\cdot(3+4)^{2|1}$

oder $3^{6|1} = 3^{2|1}\cdot 5^{4|1} = 3^{4|1}\cdot 7^{2|1}$

hingegen ist $3^{6|1} = 3.4.5.6.7.8$

$3^{2|1}\cdot 5^{4|1} = 3.4.5.6.7.8$

$3^{4|1}\cdot 7^{2|1} = 3.4.5.6.7.8$

Die IIIte Formel $a^{m-n|d} = \dfrac{a^{m|d}}{(a+(m-n)d)^{n|d}}$ ist klar denn sobald $m+n|d$ ein multipliziren deutet so deutet $m-n|d$ ein dividiren. nun $a^{m|d}$ hat n factoren wenn es also es haben soll diese müssen also weg dividirt werden und zwar fängt der wegzudividirende Factor mit $a+(m-n)d$ an, weil der letzte Factor von $a^{m-n|d}$ ist $a+(m-n-1)d$

Differenz facultaet

1/ $a^{1|d} = a^{3-2|d} = \frac{a^{3|d}}{(a+(3-2)d)^{2|d}} = \frac{a^{3|d}}{(a+d)^{2|d}} = \frac{a.(a+d)(a+2d)}{(a+d)(a+2d)} = a$

2/ $a^{0|d} = a^{p-p|d} = \frac{a^{p|d}}{(a+(p-p)d)^{p|d}} = \frac{a^{p|d}}{a^{p|d}} = 1$

3 $a^{-n|d} = a^{0-n|d} = \frac{a^{0|d}}{(a+(0-n)d)^{n|d}} = \frac{1}{(a-nd)^{n|d}} = \frac{1}{((a-nd)+(n-1)d)^{n|-d}}$

$= \frac{1}{(a-d)^{n|-d}}$

oder ist $-n = m-(m+n)$ so ist

$a^{-n|d} = \frac{a^{m|d}}{(a+(m-m-n)d)^{m+n|d}} = \frac{a^{m|d}}{(a-nd)^{m+n|d}}$

nun ist $(a-nd)^{m+n|d} = (a-nd)^{m|d}\cdot(a-nd+md)^{n|d} =$

$(a-nd)^{n|d}\cdot(a-nd+nd)^{m|d} =$

$(a-nd)^{n|d}\cdot(a)^{m|d}$

nun hebt sich $a^{m|d}$ im Zähler und Nenner und es bleibt $\frac{1}{(a-nd)^{n|d}}$

Die Sätze 1, 2, 3 werden klar auch schon dadurch, daß die Facultät nur ein Abkürz. der Potenz ist und in 1 u 2 fällt durch ihr [illegible] weil bei dem Expon. 0 u 1 die Diff. d keinen Einfluß hat.

Prüfung ob die Formeln der ganzen Facultaeten auch für Differenz facultaeten gelten.

I $a^{n|d} = (a+(n-1)d)^{n|-d}$ oder $n = p-q$ $\frac{a^{p|d}}{(a+(p-q)d)^{q|d}} = \frac{(a+(p-q-1)d)^{p|-d}}{[a+(p-q-1)d+(p-q)d]^{q|-d}}$

Durch Formel III verwandelt sich die Fact. in $a^{p-q|d}$ welche [illegible] vermöge der Iten Formel [illegible] $= (a+(p-q-1)d)^{p-q|-d}$

NB. der Beweis ist schwerer Cf. Th. 138.

$$\text{formel II}\quad a^{\overset{I}{m+n\,I\,d}} = a^{m\,I\,d} \cdot \overset{II}{(a+md)^{n\,I\,d}} \quad \text{oder } m = p-q,\ n = r-s$$

$$a^{(p-q)+(r-s)} = a^{(p+r)-(q+s)}\ \text{Zwischen?} \quad \frac{a^{p+r\,I\,d}}{(a+(p+r-q+s)d)^{q+s\,I\,d}} = a^{(p+r)-(q+s)\,I\,d} = a^{(p-q)+(r-s)\,I\,d}$$

$$\text{Nenner und II)}\quad \frac{a^{p\,I\,d}}{(a+(p-q)d)^{q\,I\,d}} \cdot \frac{(a+(p-q)d)^{r\,I\,d}}{(a+(p-q)d+(r-s)d)^{s\,I\,d}} = \text{nach}$$

$$\text{formel III}\quad a^{p-q\,I\,d} \cdot (a+md)^{r-s\,I\,d} = a^{p-q\,I\,d} \cdot (a+pd-qd)^{r-s\,I\,d} = a^{(p-q)+(r-s)\,I\,d}$$

Cf. Nr. 140

~~oder die cf. II wirklich multipliziert ergiebt~~

$$\frac{a^{p\,I\,d} \cdot (a+(p-q)d)^{r\,I\,d}}{(a+(p-q)d)^{q\,I\,d} \cdot (a+(p-q)d+(r-s)d)^{s\,I\,d}} = \frac{a^{p+r\,I\,d}}{(a+(p-q)d)^{q+s\,I\,d}} \quad \text{und}$$

~~+ dieser Ausdruck ist gleich~~

$$\text{III formel. 1)}\ a^{m-n\,I\,d} = 2)\ \frac{a^{m\,I\,d}}{(a+(m-n)d)^{n\,I\,d}} \quad \text{oder}$$

~~Zurückend~~

$$\text{da } (m-n) = (p-q)-(r-s)\quad 1)\ \frac{a^{p-q\,I\,d}}{(a+((p-q)-(r-s))d)^{r-s\,I\,d}} = \frac{\dfrac{a^{p\,I\,d}}{(a+(p-q)d)^{q\,I\,d}}}{\dfrac{(a+(p-q-r+s)d)^{r\,I\,d}}{(a+(p-q-r+s)d+(r-s)d)^{s\,I\,d}}}$$

$$2)\quad a^{m\,I\,d} = \frac{a^{p\,I\,d}}{(a+(p-q)d)^{q\,I\,d}}$$

$$(a+(m-n)d)^{n\,I\,d} = \frac{(a+(p-q-r+s)d)^{r\,I\,d}}{(a+(p-q-r+s)d+(r-s)d)^{s\,I\,d}}$$

die Schlüsse ist hier also identisch.

Cf. Nr. 139.

4 formel $h^m \cdot a^{m|d} = (ha)^{m|hd}$ ~~oder~~ so soll

$h^{p-q} \cdot a^{p-q|d} = (ha)^{p-q|hd}$ oder

$$\frac{h^p}{h^q} \cdot \frac{a^{p|d}}{(a+(p-q)d)^{q|d}} = \frac{(ha)^{p|dh}}{(ha+(p-q)dh)^{q|dh}}$$ oder

was sich auch durch multiplication der Ausdrucks links unmittelbar ergiebt.

Folgerungen aus den formeln

1) $a^{m|d} = (-1)^m \cdot (d-a-md)^{m|d}$ denn

$(-1)^m \cdot (d-a-md)^{m|d} = (-d+a+md)^{m|-d} = (a+(m-1)d)^{m|-d} = a^{m|d}$

Man kann so verwandeln: $a^{m|d} = (a+(m-1)d)^{m|-d}$ da nun $(-1)^m = \pm 1$ so kann ich damit multipl. und bekomme $(-a-md+d)^{m|d}$ [illegible]

2) da $a = a \cdot 1$, so kann ich a als Po[tenz] ... von m darstellen und 1 ... Nach dem Lehrsatz [illegible] $h^m \cdot a^{m|d} = (ah)^{m|hd}$ müsste ... $a^m \cdot 1^{m|x}$ ... x so beschaffen seyn daß es mit a multiplic. d geben, es müsste also $= d:a$ seyn

3) dasselbe gilt von $\left(\frac{a}{A}\right)^{m|d}$ weil $= \left(\frac{a}{A} \cdot 1\right)^{m|d} = \left(\frac{a}{A}\right)^m \cdot 1^{m|x}$ wo x = seyn muss $d : \frac{a}{A} = dA : a$

4) Es ist leicht zu ersehen daß $a^{m|d} = \left(da = \frac{d \cdot a}{d}\right) = d^m \cdot \left(\frac{a}{d}\right)^{m|1}$

5) verfahren $a = \frac{a \cdot d \cdot D}{d \cdot D}$ so ist $a^{m|d} = \left(\frac{d}{D}\right)^m \cdot \left(\frac{aD}{d}\right)^{m|D}$

2) $a^{m|d} = a^m \cdot 1^{m|(d:a)}$ denn

$a^m \cdot 1^{m|(d:a)} = a^{m|((d:a)a)} = a^{m|d}$

3) $\left(\frac{a}{A}\right)^{m|d} = \frac{a^m}{A^m} \cdot 1^{m|(dA:a)}$ denn

$\frac{a^m}{A^m} \cdot 1^{m|(dA:a)} = \left(\frac{a}{A}\right)^{m|\left(\frac{dA \cdot a}{a \cdot A}\right)} = \left(\frac{a}{A}\right)^{m|d}$

4) $a^{m|d} = d^m \cdot \left(\frac{a}{d}\right)^{m|1}$ denn

$d^m \cdot \left(\frac{a}{d}\right)^{m|1} = \left(\frac{ad}{d}\right)^{m|d} = a^{m|d}$

5) $a^{m|d} = \frac{d^m}{D^m} \cdot \left(\frac{aD}{d}\right)^{m|D}$ denn das letzte $= \left(\frac{a \cdot D \cdot d}{d \cdot D}\right)^{m|\frac{d \cdot D}{D}} = a^{m|d}$.

6) ich kann überhaupt fragen wie $a^{m I d}$ in factoren zerlegbar sei. Es ist $a^{m I d} = a^{m+1-1 I d}$ $= a^{1 I d} \cdot (a+d)^{m-1 I d} = a \cdot (a+d)^{m-1 I d}$ wo statt 1 belieb: dürffe setzen 7) ich konnte aber auch $a^{m+1-1 I d}$ so zerlegen $= a^{m-1 I d} \cdot (a+(m-1)d)^{1 I d}$ was den 7. Satz giebt.

6) $a \cdot (a+d)^{m-1 I d} = a^{1 I d} \cdot (a+d)^{m-1 I d} =$
$a^{m-1+1 I d} = a^{m I d}$

7) $a^{m-1 I d} \cdot (a+(m-1)d) = a^{m-1 I d} \cdot (a+(m-1)d)^{1 I d} =$
$a^{m-1+1 I d} = a^{m I d}$

8) $(a+md)^{n I d} = \dfrac{a^{m+n I d}}{a^{m I d}}$ denn

$(a+md)^{n I d} \cdot a^{m I d} = a^{m+n I d}$ ist also direct aus formel II entnommen nur daß man mit seinem Ausdruck hier zu dividiren.

Lehrsätze § 007.

1.) $a^{2m I d} = a^{m I 2d} \cdot (a+d)^{m I 2d}$. ein Beyspiel

$5^{2 \cdot 3 I 4} = 5^{3 I 8} \cdot (5+4)^{3 I 8}$ oder

$5 \cdot (5+4)(5+8) \cdot (5+12) \cdot (5+16) \cdot (5+20) =$
$5 \cdot (5+8)(5+16) \cdot (5+4)(5+4+8)(5+4+16)$

denn $a^{m I 2d} = a(a+2d)(a+4d)(a+6d)(a+8d) \ldots\ldots (a+(2m-2)d) \ldots (a+(m-1)2d)$
und $(a+d)^{m I 2d} = (a+d)(a+3d)(a+5d)(a+7d) \ldots (a+d+(m-1)2d) \ldots (a+(2m-1)d)$

dieser $a^{m I 2d} \cdot (a+d)^{m I 2d}$ wenn man die factoren ordentlich zusammen anstellt =

$= (a)(a+d)(a+2d)(a+3d)(a+4d) \ldots\ldots (a+(2m-1)d) = a^{2m I d}$

der Beweis a priori denn $a^{2m I d} = a(a+d)(a+2d)(a+3d)(a+4d) \ldots\ldots (a+(2m-2)d)(a+(2m-1)d)$
~~in dieser Reihe ist m+m factoren~~ oder $= a(a+2d)(a+4d) \ldots (a+(2m-2)d) \cdot (a+d)(a+3d) \ldots (a+(2m-1)d)$
$= (a^{m I 2d}) \cdot (a+d)^{m I 2d}$.

91

2) $a^{2m+1|d} = a^{m+1|2d}\cdot(a+d)^{m|2d}$

diese formel ergiebt sich unmittelbar aus der ersten

denn $a^{2m+1|d} = a^{2m|d}\cdot(a+2md)^{1|d} = (a+2md)\cdot a^{m|2d}\cdot(a+d)^{m|2d}$ aber

auch $a^{m+1|2d}\cdot(a+d)^{m|2d} = a^{m|2d}\cdot(a+2md)^{1|2d}\cdot(a+d)^{m|2d} =$

$= (a+2md)\cdot a^{m|2d}\cdot(a+d)^{m|2d}$.

3.) $a^{3m|d} = a^{m|3d}\cdot(a+d)^{m|3d}\cdot(a+2d)^{m|3d}$ denn

$a^{m|3d} = \overset{1}{a}\,(\overset{4}{a+3d})\cdot(\overset{7}{a+6d})(\overset{10}{a+9d})(\overset{13}{a+12d})\ldots\ldots(a+(m-1)3d)$ (m – 2 factor

$(a+d)^{m|3d} = (\overset{2}{a+d})(\overset{5}{a+4d})(\overset{8}{a+7d})(\overset{11}{a+10d})(\overset{14}{a+13d})\ldots(a+d+(m-1)3d)$ (m – 1 fa
$\ldots\ldots(a+(3m-2)d)$

$(a+2d)^{m|3d} = (\overset{3}{a+2d})(\overset{6}{a+5d})(\overset{9}{a+8d})(\overset{12}{a+11d})(\overset{15}{a+14d})\ldots(a+2d+(m-1)3d)$ (m fa
$a+(3m-1)d$

Da sehen wir, daß gehen wir nach der Ordnung der factoren 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 … m–2, m–1, m jeder folgende factor um ein d grösser ist folglich sämtliche factoren eine facultaet $a^{3m|d}$ bilden Cf §. 145

4.) $a^{3m+1|d} = a^{m+1|3d}\cdot(a+d)^{m|3d}\cdot(a+2d)^{m|3d}$ denn

denn nennen wir die Gleich. A = B so ist

$A = a^{3m|d}\cdot(a+3md)^{1|d} = a^{m|3d}\cdot(a+d)^{m|3d}\cdot(a+2d)^{m|3d}\cdot(a+3md)$

$B = a^{m|3d}\cdot(a+3md)\cdot(a+d)^{m|3d}\cdot(a+2d)^{m|3d}$

daher ist sich A = B identisch.

Cf §. 145.

92 5) $a^{3m+2|d} = a^{m+1|3d} \cdot (a+d)^{m+1|3d} \cdot (a+2d)^{m|3d}$

denn $A = a^{3m|d} \cdot (a+3md)^{2|d} =$

$A = a^{m|3d} \cdot (a+d)^{m|3d} \cdot (a+2d)^{m|3d} \cdot (a+3md) \cdot (a+4md)$

$B = a^{m|3d} \cdot (a+3md)^{1|3d} \cdot (a+d)^{m|3d} \cdot (a+d+3md)^{1|3d} \cdot (a+2d)^{m|3d}$

und es zeigt sich die Identität. Cf №. 145 u 146.

Diese Formeln gelten daß m = absolut ganze Zahl ist. m = p−q dann verwandelt sich die Formel I.

$a^{2m|d} = a^{m|2d} \cdot (a+d)^{m|2d}$ in eine solche

$a^{2p-2q|d} = a^{p-q|2d} \cdot (a+d)^{p-q|2d}$ oder

$$\frac{a^{2p|d}}{(a+(2p-2q)d)^{2q|d}} = \frac{a^{p|2d}}{(a+(p-q)2d)^{q|2d}} \cdot \frac{(a+d)^{p|2d}}{(a+d+(p-q)2d)^{q|2d}}$$

und es ist die Gültigkeit dieser Abs. zu beweisen.

Nun ist $a^{p|2d} \cdot (a+d)^{p|2d}$ ebenso wie gewiesen $= a^{2p|d}$ und $(a+(p-q)2d)^{q|2d} \cdot (a+(p-q)2d+d)^{q|2d} = (a+(p-q)2d)^{2q|d}$ noch zu beweisen war.

II formel. $a^{2m+1|d} = a^{m+1|2d} \cdot (a+d)^{m|2d}$ oder

$a^{2p-2q+1|d} = a^{p-q+1|2d} (a+d)^{p-q|2d}$ oder $a^{(2p+1)-2q|d} = a^{(p+1)-q|2d} \cdot (a+d)^{p-q|2d}$

$$\frac{a^{2p+1|d}}{(a+(2p+1-2q)d)^{q|d}} = \frac{a^{p+1|2d}}{(a+(p+1-q)d2)^{q|2d}} \cdot \frac{(a+d)^{p|2d}}{(a+d+(p-q)2d)^{q|2d}}$$

welche Abtheilung ebenso ~~wie~~ bewiesen werden wie die obern. Auch dieselben Beweise [illegible] die übrigen drei Cf №. 146.

III $a^{m-n\,I\,d} = \dfrac{a^{m\,I\,d}}{[a+(m-n)d]^{n\,I\,d}}$ die Richt. der Formel

erklärt sich wenn man links durch den multipl. aus formel II.

Die ~~Schranken~~ Factorenfolge [illegible] sich ebenso wie in formel II. nämlich es

muss der Exponent mit der Diff des neuen Factors, ein Product

bilden, welches zu der Basis a addirt wieder die vom form II Exp mId und prod md

[illegible] Exp m-nId das prod (m-n)d. Wir multipliziren also

$a^{m-n\,I\,d} \cdot [a+(m-n)d]^{n\,I\,d} = a^{(m-n)+n\,I\,d} = a^{m\,I\,d}$

die formel [illegible] eine ganze Facultaet

[illegible].

[illegible] ist es ein Umstand dass man die formel

~~[illegible]~~ kann [illegible] statt formel III [illegible]

[illegible] also auch m = m-n [illegible] man [illegible] oder, so ergiebt sich

$a^{(m-n)+n\,I\,d} = a^{(m-n)\,I\,d} \cdot (a+(m-n)d)^{n\,I\,d}$

$\dfrac{a^{m\,I\,d}}{[a+(m-n)d]^{n\,I\,d}} = a^{(m-n)\,I\,d}$.

[illegible] die [illegible] ist [illegible]

[illegible]

IV $a^{m\,I\,d} \cdot h^m = (ha)^{m\,I\,hd}$

denn $a^{m\,I\,d} = a.(a+d)(a+2d) \ldots\ldots [a+(m-1)d]$ } beyde multipl.

und $h^m = h.\ h.\ h.\ \ldots\ldots\ h$

$a^{m\,I\,d} \cdot h^m = ah.(ah+hd).(ah+2hd) \ldots\ldots [ah+(m-1)hd] = (ah)^{m\,I\,hd}$

diese formel lehrt wie man eine ganze

Facultaet bei zusammengesetzter Basis und

zusammengesetzter Diff in eine einfache

gewöhnliche verwandelt.

daß diese Bedeutung der Differenz facultaet haben muß, darüber die III formel an. Es ist nicht zu begreifen daß die formel der ganz Potenzen auch für [?] gelten; Man überzeugt sich, daß es so ist, wenn man überall statt der ganzen ~~Potenz~~ Facultaet die Diff. facultaet setzt und prüft ob die formel gelten. Cf. [illegible]: Nun mag man statt jeden Exp. m $(\alpha-\beta)$ und statt n $(\gamma-\delta)$ setzen

die besondere ~~Anwendung~~ der facult. ist zu finden, doch ihre Anwendung ungemein schwer

Wir gehen aber zu differenz facultaet, wenn nemlich $z = (m-n)$ [Diff] zweier ganzen Zahlen (welche die 3 formen fort, gesetzt sind) Diff. Zahl so ist eine Differenz facultaet.

$$a^{z|d} = \frac{a^{m|d}}{[a+(m-n)d]^{n|d}}$$

Demnach ist $a^{1|d}$ nach ersten Art nicht zu erklären, wohl aber nach dem 2ten denn 1 = einer Diff zweyer ganzen Zahlen z. B. 3−2 daher

$$a^{1|d} = \frac{a^{3|d}}{[a+(3-2)d]^{2|d}} = \frac{a^{3|d}}{(a+d)^{2|d}} =$$

$$= \frac{a\cdot(a+d)\cdot(a+2d)\cdot}{(a+d)\cdot(a+2d)} = a$$

also bedeutet $a^{1|d} = a$

So $a^{0|d}$ denn ist $z = m-m$ also

$$a^{0|d} = \frac{a^{m|d}}{[a+(m-m)d]^{m|d}} = \frac{a^{m|d}}{a^{m|d}} = 1$$

Endlich ergiebt sich die Bedeutung dieser facult. $a^{-n|d}$ denn ist $z = m-(m+n)$ daher

$$a^{-n|d} = \frac{a^{m|d}}{[a+(m-m-n)d]^{m+n|d}} = \frac{a^{m|d}}{(a-nd)^{m+n|d}}$$

also $a^{-n|d} = \dfrac{a^{m|d}}{(a-nd)^{m+n|d}}$ diese formel läßt sich durch die andern [?] [illegible] wenn man bei Nahmen die II formel anwenden will

95

Nehmlich $(a-nd)^{m+n|d}$ ist $=(a-nd)^{m|d}\cdot[(a-nd)+md]^{n|d}$

also $\frac{a^{m|d}}{(a-nd)^{m+n|d}} = \frac{a^{m|d}}{(a-nd)^{m|d}\cdot((a-nd)+md)^{n|d}} =$

$= \frac{a^{m|d}}{(a-nd)^{n|d}\cdot(a-nd+nd)^{m|d}} = \frac{a^{m|d}}{a^{m|d}\cdot(a-nd)^{m|d}} = \frac{1}{(a-nd)^{m|d}}$

Zur Bezeichnung aller mit gewissen und Differenzfacultäten [illegible] Facultäten Theorie ist bis jetzt in der Analysis nicht.

$1.\,2.\,3.\,4.\,\ldots\, m$ ist die specielle Facultät bezeichnet $1^{m|1}$ oder nach der I formeln $= m^{m|-1}$ ähnlich

auch $\frac{a^{m|d}}{1^{m|1}} = \frac{(a+(m-1)d)^{m|-d}}{(1+(m-1)1)^{m|-1}} = m^{m|-1}$

Man bedient sich nur das Zeichen $m!$ oder m' dafür, weil die Facultät oft verbunden und [illegible] als eine m Facultät. Wenn m eine beliebige Zahl [illegible] ist, so sind die Facultäten $1^{m|1}$ und $m^{m|-1}$ einander gleich.

Kram der über die Facultäten schreibt bedient sich $m!$ zeichens

so ist $4! = 1^{4|1} = 1.2.3.4.$

$1! = 1^{1|1} = 1$

$0! = 1^{0|1} = 1$

$(-3)! = 1^{-3|1} = \frac{1}{(-2)^{3|1}} = \frac{1}{(-2).(-1).0} = \frac{1}{0}$ aber

denn $\frac{m-m}{0-3}$

durch 0 durch man nicht dividiren und der specielle Fall muss ~~man [illegible]~~ wieder ausgeschlossen werden.

Das Zeichen M_n deutet an $\frac{m^{n|-1}}{n!}$ n kann beliebig seyn, n aber [illegible] Zahl ganz sein.

hätte weder die obere noch untere Gränze
keine Bedeutung. Wenn n eine ganze Zahl so
würde $m^{n|-1}$ bedeuten $\dfrac{m\cdot(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-(n-1))}{1.2.3.4\ldots\ldots n}$
und n! würde bedeuten
das heißt Binomial Coefficient. —
Die Formeln der bin: Coeff. ist die Lehrbuch.

Theorie der figurirten Reihen

Denken wir uns 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 — — — fig: R. 0 Ord
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 — — — I Ord
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 — — II Ord
1, 4, 10, 20, 35, 56, 84 — — III Ord
1, 5, 15, 35, 70, 126 — —
1, 6, 21, 56 — — —
1, 7, 28, 84 — — — —

Jedes Glied in jeder Reihe ist = die Summe aller Glieder vorhergehender Reihe. diese Reihen heißen figur. Reihen. als Zusammenhang. Es giebt 2 Aufgaben
Von der m-ten figur. Reihe das n-te Glied auszudrücken durch eine function von m u. n. d.h. einen Ausdruck wo m u. n vorkommt daß z.B. 4 Glied der 6 Reihe vorkommt
2. In der n-ten fig. Reihe die Summe von m Gliedern finden durch eine function von m u. n. ausgedrückt

T^n_m d.h. das n-te Glied in der m-te Ordnung ist = $\dfrac{n^{m|1}}{m!}$ z.B.
n = 4, u. m = 6 $\dfrac{4^{6|1}}{6!} = \dfrac{4.5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5.6} = 84$

$m^{m|-1} = m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1.$ $1 = \frac{1}{1} = \frac{1^0}{1^{-1|0}} = m^0$

$(m-2)(m-1)m = \frac{m^3}{1^{-1|3}} = m^3$

Zu § 340.

1.) $\dfrac{(m+n)!}{n!} = \dfrac{1^{m+n\,\mathrm{I}\,1}}{1^{n\,\mathrm{I}\,1}} = \dfrac{1^{m\,\mathrm{I}\,1} \cdot (1+m)^{n\,\mathrm{I}\,1}}{1^{n\,\mathrm{I}\,1}} = \dfrac{1^{n\,\mathrm{I}\,1} \cdot (1+n)^{m\,\mathrm{I}\,1}}{1^{n\,\mathrm{I}\,1}} = (1+n)^{m\,\mathrm{I}\,1}$

oder $\dfrac{(m+n)!}{n!} = \dfrac{(m+n)^{m+n\,\mathrm{I}\,-1}}{n^{n\,\mathrm{I}\,-1}} = \dfrac{(m+n)^{m\,\mathrm{I}\,-1} \cdot (m+n-m)^{n\,\mathrm{I}\,-1}}{n^{n\,\mathrm{I}\,-1}} =$

$= (m+n)^{m\,\mathrm{I}\,-1} = (n+1)^{m\,\mathrm{I}\,1}$

denn $(m+n)^{m\,\mathrm{I}\,-1} = (m+n)(m+n-1) \ldots\ldots (m+n+(m-1)(-1))$

$\ldots\ldots (m+n-m+1)$

$\ldots\ldots (n+1)$

daher $(n+1)^{m\,\mathrm{I}\,1} = (m+n)^{m\,\mathrm{I}\,-1}$

2) $\dfrac{(m+n)!}{m! \cdot n!} = \dfrac{1^{m+n\,\mathrm{I}\,1}}{1^{m\,\mathrm{I}\,1} \cdot 1^{n\,\mathrm{I}\,1}} = \dfrac{1^{m\,\mathrm{I}\,1} \cdot (1+m)^{n\,\mathrm{I}\,1}}{1^{m\,\mathrm{I}\,1}} = \dfrac{(m+n)^{n\,\mathrm{I}\,-1}}{m!}$

3) $\dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{1^{n+1\,\mathrm{I}\,1}}{1^{n\,\mathrm{I}\,1}} = \dfrac{1^{n\,\mathrm{I}\,1} \cdot (1+n)^{1\,\mathrm{I}\,1}}{1^{n\,\mathrm{I}\,1}} = n+1$

4) $(n-1)! = 1^{n-1\,\mathrm{I}\,1} = \dfrac{1^{n\,\mathrm{I}\,1}}{(1+n-1)^{1\,\mathrm{I}\,1}} = \dfrac{n!}{n}.$

Zu § 442.

1) $\dfrac{(m+n)!}{m! \cdot n!} = \dfrac{(m+n)^{m+n\,\mathrm{I}\,-1}}{m^{m\,\mathrm{I}\,-1} \cdot n^{n\,\mathrm{I}\,-1}} = \dfrac{(m+n)^{m\,\mathrm{I}\,-1} \cdot (m+n-m)^{n\,\mathrm{I}\,-1}}{m^{m\,\mathrm{I}\,-1} \cdot n^{n\,\mathrm{I}\,-1}} =$

$= \dfrac{(m+n)^{m\,\mathrm{I}\,-1}}{m!} = (m+n)_m = (m+n)_n$ nun, wenn man den 3ten Ausdruck so umformt $\dfrac{(m+n)^{n\,\mathrm{I}\,-1} \cdot (m+n-n)^{m\,\mathrm{I}\,-1}}{m^{m\,\mathrm{I}\,-1} \cdot n^{n\,\mathrm{I}\,-1}}$

2) $m_m = \frac{m^{m|-1}}{m!} = \frac{m^{m|-1}}{m^{m|-1}} = 1$

$m_0 = \frac{m^{0|-1}}{0!} = \frac{m^{0|-1}}{1} = \frac{1}{1} = 1$

3) $m_{(m+n+1)} = \frac{m^{m+n+1|-1}}{(m+n+1)!} = \frac{m^{m+n|-1} \cdot (m+(n+n)(-1))^{1|1}}{(m+n+1)^{(m+n+1)|-1}} =$

$= \frac{m^{m|-1} \cdot (m-m)^{n|-1} \cdot (-n)}{}$ da nun $m-m = 0$ ist so ist $(m-m)^{n|-1}$ auch $=0$, da ein erster Factor in der Facultaet ist $=0$ und für den ganzen Zähler $=0$ daher, was auch im Nenner kommen mag, so ist $m_{(m+n+1)} = 0$

So ist auch $m_{(m+1)} = \frac{m^{m+1|-1}}{(m+1)!} = \frac{m^{m|-1} \cdot (m-m)^{1|1}}{(m+1)!} = 0$

d. h. $m_p = 0$ wenn $p > m$.

Versuch $m_{(m+n)} = \frac{m^{m+n|-1}}{(m+n)!} = \frac{m^{m|-1} \cdot (m-m)^{n|-1}}{(m+n)!} = 0$

4) $(-1)^n \cdot (-m-1)_n = \frac{(-1)^n \cdot (-m-1)^{n|-1}}{n^{n|-1}} = \frac{(m+1)^{n|1}}{n^{n|-1}} =$

$= \frac{(m+1.+n-1)^{n|-1}}{n^{n|-1}} = (m+n)_n$

und $(-1)^m \cdot (-n-1)_m = \frac{(-1)^m \cdot (-n-1)^{m|-1}}{m!} = \frac{(n+1)^{m|1}}{m!} =$

$\frac{(n+1+m-1)^{m|-1}}{m!} = (n+m)_m$ da nun $D = B$ und $C = D \mid B = A$ so ist $C = A$

Zu § 343.

1) $(m+n)_n \cdot x_{(m+n)} = \frac{(m+n)^{n|-1} \cdot x^{m+n|-1}}{n! \cdot (m+n)!} =$

$= \frac{(m+n)^{n|-1} \cdot x^{m|-1} \cdot (x-m)^{n|-1}}{n!\,(m+n)^{(m+n)|-1} = n^{n|-1} \cdot (m+n)^{m|-1} \cdot (m+n-m)^{n|-1}} =$

$\frac{(m+n)^{n|-1} \cdot x^{m|-1} \cdot (x-m)^{n|-1}}{n^{n|-1}!\,(m+n)^{n|-1} \cdot (m+n-n)^{m|-1}} = x_m \cdot (x-m)_n$

2) $(x+1)_{n+1} = \frac{(x+1)^{n+1|-1}}{(n+1)!} = \frac{(x+1)^{n|-1} \cdot (x+1-n)^{1|-1}}{(n+1)^{n+1|-1} = (n+1)^{n|-1} \cdot (n+1-n)^{1|-1}} =$

$= \frac{(x+1)^{1|-1} \cdot (x+1-1)^{n|-1}}{(n+1)^{1|-1} \cdot (n+1-1)^{n|-1}} = \frac{x^{n|-1}}{n!} \cdot \frac{(x+1)^{1|-1}}{(n+1)} =$

$x_n \cdot \frac{(x+1)^{1|-1} \cdot n!}{(n+1)!}$

2. $x_{(n+1)} + x_n = \frac{x^{n+1|-1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n|-1}}{n!} =$

$\frac{n!\, x^{n+1|-1} + x^{n|-1} \cdot (n+1)!}{(n+1)! \cdot (n!)} = \frac{n!\, x^{n+1|-1} + x^{n|-1} \cdot (n+1)^{n+1|-1}}{(n+1)!\, n!} =$

$= \frac{n!\, x^{n|-1} \cdot (x-n) + x^{n|-1} \cdot (n+1) \cdot (n)^{n|-1}}{(n+1)!\,(n!)} = \frac{(x-n+n+1)\, x^{n|-1}}{(n+1)!} =$

$= \frac{(x+1)\, x^{n|-1}}{(n+1)!} = \frac{(x+1)^{n+1|-1}}{(n+1)!} = (x+1)_{n+1}$

3.) $(-1)^n \cdot x_n = \frac{(-1)^n \cdot x^{n|-1}}{n!} = \frac{(-x)^{n|1}}{n!} =$

$= \frac{(-x+n-1)^{n|-1}}{n!} = (-x+n-1)_n$

4) $x_0 = \frac{x^{0|-1}}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

5) $x_1 = \frac{x^{1|-1}}{1!} = \frac{x}{1} = x$

6) ~~x_0~~ $0_m = \frac{0^{m|-1}}{m!} = \frac{0}{m!} = 0.$

Zu den figurirten Reihen

Daß $t^n_m = s^n_{m-1}$ folgt aus der Def unmittelbar

so ist auch $t^n_m = s^n_m - s^{n-1}_m$ denn

$s^n_m = t^n_{m+1}$ daher $t^n_{m+1} - t^{n-1}_{m+1} = t^n_m$ bleibt

$s^{n-1}_m = t^{n-1}_{m+1}$

die Summe der n ersten Glieder im m^t Ord ist
$S^n_m = \frac{n^{m+1|1}}{(m+1)!}$ z. B. 5 Ord. summe 4 ersten Glieder
$n=4$, $m=5$. $\frac{4^{6|1}}{6!} = 84$ [illegible]
der Reihe [illegible] dahero $T^n_m = S^n_{m-1}$
wenn $n=n$, $m=m$ ist zu beyden
die Defin: der fig: Reihen ist $T^n_{m+1} = S^n_m$ wenn nur
$T^1_m = 1$

Beweis der 2 formeln.

In der ersten Reihe ist das n^{te} Glied n d. h.
$T^n_1 = n$ und $\frac{n^{m|1}}{m!}$ für $m=1$ so ist $\frac{n^{1|1}}{1!} = n$
der n^{te} Glied in 2 Ordnung ist die Summe der
n ersten Glieder in der 1te Ord. die Summe
der n Gl: der 1 Reihe ist $(a)+(a+d)+(a+2d) \ldots + (a+(n-1)d)$ die
~~umgek~~ [illegible] geschrieben $(a+(n-1)d) + (a+(n-2)d) + (a(n-3)d) \ldots\ a$ und
dies überall die, $(a+a+(n-1)d)\ (a+a(n-1)d)\ (a+a(n-1)d) \ldots (a+a(n-1)d)$
selben Summanden [illegible]
[illegible] weil [illegible] die Differenz [illegible]
[illegible] $a+(n-1)d$. der letzte Ausdruck z. B. $=u$ ist so ist $2S = (a+u)n$
wo n wie gewöhnlich die Zahl der Ausdrücke bedeutet
die Summe der Reihe selbst ist $\frac{(a+u)n}{2}$ dahero
bei [illegible] $\frac{(1+n)n}{2} = T^n_2$ nun muss die formel
$\frac{n^{m|1}}{m!}$ dieselben geben $m=2$ also $\frac{n^{m|1}}{m!} = \frac{n^{2|1}}{2!} = \frac{n.(n+1)}{1.2.}$
[illegible] also gefundenen [illegible] der [illegible]
Werth für T^n_m auch auch die [illegible]
Ordnung [illegible]. —

102 Um nun den Satz allgemein zu beweisen ist folgendes Beispiel nöthig, welches also lautet:
Wenn unsere Formel für die h^{te} Reihe das n^{te} Glied gebe, so giebt sie nothwendig das n^{te} Glied in der $(h+1)^{ten}$ Reihe. Dieser Induktionsbeweis wird immer gebraucht bei solchen Beweisen

<u>Beweis</u>. Wenn ${}^{n}T_{h} = \frac{n^{h|1}}{h!}$ dann muss

${}^{n}T_{h+1} = \frac{n^{h+1|1}}{(h+1)!}$ Es scheint, als man nichts dabei zu beweisen wären, denn h bedeutet jede Zahl also auch $(h+1)$ und dies ist eine Tautologie. Aber wir wissen nicht ob die 1ste Gleichung jeden Werth von h gilt. —
Sie hat hier einen bestimmten Werth nämlich die Zahl für welche durch Versuch die Gl: richtig war. — Beweis selbst.

T^{n}_{h+1} ist nach Definition $S^{n}_{h} = S^{n-1}_{h} + T^{n}_{h}$

nun ist $S^{n-1}_{h} = T^{n-1}_{h+1}$ daher

$S^{n-1}_{h} + T^{n-1}_{h} = T^{n}_{h+1} + T^{n}_{h}$ daher

$T^{n}_{h+1} - T^{n-1}_{h+1} = T^{n}_{h}$

Nun wollen wir

statt $n = n-1$ setzen

T^n_{h+1} ist nach der Definition der Reihen $= S^n_h$ 103
Es ist nun deutlich daß S^n_h aus der Summe
$(n-1)$ Glieder + dem n^{ten} Gliede (beydes in h^{ter} Reihe)
bestehet. daher

$$1)\quad S^n_h = S^{n-1}_h + T^n_h$$

Nach der Definition ist nun $S^{n-1}_h = T^{n-1}_{h+1}$ und $S^n_h = T^n_{h+1}$ — Sind zu beweisen daß wenn $T^n_h = \frac{n^{h|1}}{h!}$ sey
mithin verwandelt sich die I) Gleichung in — $T^n_{h+1} = \frac{n^{(h+1)|1}}{(h+1)!}$

$$II)\quad T^n_{h+1} = T^{n-1}_{h+1} + T^n_h \quad \text{oder}$$

$$III\quad T^n_{h+1} - T^{n-1}_{h+1} = T^n_h$$ der [illegible]

Wir sehen nun daß man nur statt T^n_h den
Werth setzen, und darnach das $\frac{n^{h|1}}{h!}$ T^n_h ~~bes~~
bestimmen, und (ist) wieder $\frac{n^{h|1}}{h!}$, so ist der
Satz erwiesen. Wir versuchen

$$T^n_{h+1} - T^{n-1}_{h+1} = \frac{n^{h+1|1} - (n-1)^{h+1|1}}{(h+1)!} = \frac{n^{h|1}\cdot(n+h)^{1|1} - (n-1)^{h|1}(n-1+h)^{1|1}}{(h+1)!}$$

$$= \frac{n^{h|1}\cdot(n+h) - (n-1)^{h|1}\cdot(n-1+1)^{h|1}}{(h+1)!} = \frac{n^{h|1}\cdot(n+h) - (n-1)\,n^{h|1}}{h+1} =$$

$$= \frac{n^{h|1}(n+h-n+1)}{(h+1)!} = \frac{n^{h|1}\cdot(h+1)}{(h+1)!} = \frac{n^{h|1}\cdot(h+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdots(h+1)} =$$

$$= \frac{n^{h|1}}{h!}$$

Wir sehen nun daß aus den Werthen für T^h_{n+1} welche die Formel geben sich der Werth für T^n_h bestimmt den auch die Formel giebt. Wir schließen nun so: weil

104 nach der Definition die Gl: I) auch, da nur alles [illegible] haben, völlig bestimmt ist so ist auch die Gl. III nun völlig bestimmt; 2tens weil nur ein Ausdruck der statt des Ausdrucks [illegible] gesetzt der Gl: genügen kann, (denn wären ein anderer so würden t^n_{h+1} zwei verschiedenen Ausdrücke zu haben, was gegen Begriff der Reihe ist), daher also $\frac{n^{h+1|1}}{(h+1)!}$ der einzige ist der t^n_{h+1} identisch ist. — es folgt also, weil [illegible] den Werth für t^n_{h+1} der Werth für t^n_h ergiebt und beyde Werthe von einer Formel [illegible], daß wenn die Formel für $h$te Reihe gilt sie auch für $(h+1)$te Reihe gilt.

Zusatz $T^n_m = \frac{n^{m|1}}{m!}$ = nach I form. $\frac{(n+(m-1))^{m|-1}}{m!}$

Da nun der binomial Coeff $x_m = \frac{x^{m|-1}}{m!}$

so ist auch $\frac{(n+(m-1))^{m|-1}}{m!}$ ein bin: Coeff

daher $= (n+m-1)_m$. Es ist denselben Werthe mit figurirte Zahl und ein binomial Coeff: Es ergiebt sich ferner daß

$$(n+m-1)_m = (n+m-1)_{n-1} = \frac{(n+m-1)^{n-1|-1}}{(n-1)!} =$$

$$= \frac{(m+1)^{n-1|1}}{(n-1)!}$$

Was nun den Beweis der II Formel $S^n_m = \frac{n^{m+1|1}}{(m+1)!}$ anbelangt, so ist klar, daß weil $S^n_m = t^n_{m+1}$ und $t^n_{m+1} = \frac{n^{m+1|1}}{(m+1)!}$ daß auch S^n_m diesen Ausdrücke gleich sein müssen.

Man kann nun den Satz auch so beweisen a priori und nach ihm dann alle übrigen, den 1sten Satz ableiten. Dieser Weg ist im Lehrbuche. Nemlich daß

$S_1^n = \frac{n^{2|1}}{2!}$ folgt aus dem Begriffe der Reihe

denn $S_1^n = 1+2+3+4 \ldots\ldots n$ es ist aber eine wie wir gesehen haben eine solche arith: Reihe $S = \frac{(a+u)n}{2}$

also hier $\frac{(1+n)n}{2} = \frac{n^{2|1}}{2!}$.

Die figurirte Reihe der 2 Ord: ist nun nicht mehr arithm: Reihe der 1. Ord. wo die Differenzen gleichmässig wären, indem diese selbst eine arith: Reihe bilden, daher muss hier der Beweis anders geführt werden, um die Formel dieser Reihe anzuzeigen. Nemlich muss sehen zu ob der Werth für S_2^n gilt, wenn $n=2$ ist, und gilt er, so ist zu beweisen daß wenn der Werth für S_2^n gilt wenn $n=h$ so gilt er auch wenn $n=(h+1)$. Nun gesetzt aber $\frac{n^{3|1}}{3!}$ für $n=2$ denn S_2 ist dann

$S_2^2 = 4$, und $\frac{n^{3|1}}{3!} = \frac{2^{3|1}}{3!} = \frac{2+3+4}{1.2.3} = 4$

Es ist also nur zu beweisen daß wenn $S_2^h = \frac{h^{3|1}}{3!}$ so ist zugleich $S_2^{(h+1)} = \frac{(h+1)^{3|1}}{3!}$

Beweis $S_2^{h+1} = S_2^h + t_2^{h+1} = S_2^h + S_1^{h+1} =$

$$\frac{h^{3|1}}{3!} + \frac{(h+1)^{2|1}}{2!} = \frac{h.(h+1)(h+2)}{1.2.3} + \frac{(h+1)(h+2)}{1.2.} =$$

$$\frac{h.(h+1)(h+2) + 3.(h+1)(h+2)}{1.2.3} = \frac{(h+1)(h+2)(h+3)}{1.2.3} = \frac{(h+1)^{3|1}}{3!}$$

so ist also $S_2^{h+1} = \frac{(h+1)^{3|1}}{3!}$ wenn nur $S_2^h = \frac{h^{3|1}}{3!}$; h kann aber 2 seyn also gilt der Satz für 3, für 4, 5, 6 u. s. f.

Aus diesen 2 Formeln für die 1 u. 2 fig. Reihe abstrahiren wir eine allgemeine Formel $S_m^n = \frac{n^{(m+1)|1}}{(m+1)!}$ und beweisen, daß, wenn $S_m^n = \frac{n^{m|1}}{m!}$ daß auch der nothwendig $S_{m+1}^n = \frac{n^{(m+2)|1}}{(m+2)!}$

Beweis.

Gilt die Formel für S_{m+1}^n für $n = h$ so gilt sie auch für $n = h+1$ denn

$$S_{m+1}^{h+1} = S_{m+1}^h + t_{m+1}^{h+1} = S_{m+1}^h + S_m^{h+1} =$$

$$\frac{h^{(m+2)|1}}{(m+2)!} + \frac{(h+1)^{(m+1)|1}}{(m+1)!} =$$

$$= \frac{h \cdot {}^{(m+2)|1} + (h+1)^{m+1|1} \cdot (m+2)}{(m+2)!} =$$

$$= \frac{(h)(h+1)(h+2)\cdots(h+m+1) + (h+1)(h+2)\cdots(h+1+m)(m+2)}{(m+2)!} =$$

$$= \frac{[(h+1)(h+2)\cdots(h+m+1)][(h)+(m+2)]}{(m+2)!} =$$

denn es ist nemlich
$(h+m+1) = [(h+1)+m]$
$(h+m+2) = [(h+1)+m+1]$
$= (h+1)+(m+2-1)$

$\frac{(h+1)^{m+2|1}}{(m+2)!}$. Mithin ist $S_{m+1}^{h+1} = \frac{(h+1)^{m+2|1}}{(m+2)!}$ nach der Formel die allgemein ist.

nun muß die formel auch gelten für S^n_{m+1} und für S^n_n. Nun ist $S^2_{m+1} = 2+m$ (denn nach dem

Schema
1, 2, 3, 4 ...
1, 3, 6, 10 ...
1, 4, 10, 20 ...

bildet die 2te senkrechte Reihe eine arith. Reihe bei der diff 1, welcher unterstes S^2_{m+1} nach dem 1. Gl: das (m+1)te Glied der Reihe = 1 und auch dessen 2tes Glied dieser Reihe, denn es ist aber die Summe der 2 ersten Glieder der m-ten Reihe, wo das erste = 1, das 2te = (m+1); daher da die erste Ord = 2 ist, so ist die 2te Ord davon = 3, mte Ord = m+1, (m+1)te Ord = m+2, und da das erste Glied immer = 1 ist, so ist $S^2_{m+1} = m+3$. Da nun m+3 sich auch ergibt, wenn man in die formel $\frac{n^{(m+1)|1}}{(m+1)!}$ n = 2 und m = (m+1) setzt, ähnlich ab[?]

denn $\frac{2^{m+2|1}}{(m+2)!} = \frac{2.3.4\cdots\cdots(2+m+1)}{1.2.3.4\cdots(m+2)} = m+3$

mithin gilt die formel für S^2_{m+1}, so gilt sie auch für S^3_{m+1}, allg: also für S^n_{m+1}, wenn sie nur gilt für S^n_m. Da sie aber für S^n_2 gilt, so gilt sie für S^n_3 u. s. f. also gilt sie für S^n_m.

Endlich gilt auch die formel für n = 1 und m = 0, denn dann ist $\frac{n^{m+1|1}}{(m+1)!} = \frac{1^{0+1|1}}{(0+1)!} = \frac{1}{1} = 1$

Folgerungssätze

1.) $t^n_0 = 1$ = (die formel für t^n_m war gen: $\frac{n^{m|1}}{m!}$) $= \frac{n^{0|1}}{0!}$ $\left(=\frac{1}{1}=1\right)$

2.) $t^n_1 = S^n_0 = n = \frac{n^{1|1}}{1!} = \frac{n^{1|-1}}{1!} = n$, nach dem Lagrangeschen Lehrs[atz?]

$n_1 = n_{n-1}$ (denn $n_{n-1} = \frac{n^{n-1|-1}}{(n-1)!} = \frac{n.(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n+(n-1-1)(-1))}{(n-1)!}$ = umgekehrt gesetzt $= \frac{2.3.4\cdots\cdots(n-1).n}{1.2.3.4\cdots\cdots(n-1)} = n$) ferner ist

$n_{n-1} = \frac{n^{n-1|1}}{(n-1)!} = \frac{2^{n-1|1}}{(n-1)!}$

Aus der formel §342, I
$(m+n)_m = (m+n)_n$ ...
1) daß $n_1 = n_{n-1}$ denn

$n_1 = (n-1+1)_1 =$

$(n-1+1)_{n-1} = n_{n-1}$

2) daß $(n+1)_2 = (n+1)_{n-1}$

denn

$(n+1)_2 = (n-1+2)_2 =$

$= (n-1+2)_{n-1} = (n+1)_{n-1}$

3) $(n+m-1)_m =$

$(n+m-1)_{n-1}$

man nenne die ver-
wechseln als
viel $m+(n-1)$ be-
stehend betrachtet.

3) $\int_2^n = \int_1^n$ (nach §346 I) $= \dfrac{n^{2|1}}{2!} = \dfrac{(n+1)^{2|-1}}{2!} =$

$(n+1)_2 = (n+1)_{n-1} = \dfrac{(n+1)^{n-1|-1}}{(n-1)!} = \dfrac{3^{n-1|1}}{(n-1)!}$

denn $(n+1)_{n-1} = \dfrac{(n+1)^{n-1|-1}}{(n-1)!} = \dfrac{(n+1)(n)(n-1)\cdots(n+1+(n-1-1)(-1))}{(n-1)!}$

$= \dfrac{3.4.5.6\cdots(n-1)(n)(n+1)}{1.2.3.4.5.6\cdots(n-1)} = \dfrac{n.(n+1)}{1.2.} = \dfrac{n^{2|1}}{2!}$

6). $t_m^n = \int_{m-1}^n = \dfrac{n^{m-1|1}}{(m-1)!} = \dfrac{(n+(m-2))^{m-1|-1}}{(m-1)!} =$

$=$ nach (§346 V) $= \dfrac{n^{m|1}}{m!} = \dfrac{(n+m-1)^{m|-1}}{m!} =$

$= (n+m-1)_m = (n+m-1)_{n-1}$ dort ferner

$(n+m-1)_{n-1} = \dfrac{(n+m-1)^{n-1|-1}}{(n-1)!} =$

$= \dfrac{(n+m-1)(n+m-2)\cdots\cdots(n+m-1-n+2)}{1.2.3.4\cdots\cdots(n-1)} =$

$= \dfrac{(m+1)(m+2)\cdots\cdots(m+n-1)}{(n-1)!} = \dfrac{(m+1)^{n-1|1}}{(m-1)!}$

$= \dfrac{(m+1)(m+2)\cdots\cdots(m+1+n-2)}{(n-1)!} = \dfrac{(m+1)^{n-1|1}}{(n-1)!}$

so daß auch $t_m^n = \dfrac{(m+1)^{n-1|1}}{(n-1)!}$

Permutationen. Variat. Combinat.

Der Theil d. Lehrb.: enthält 2 Theile die Logik, die in specielle Logik muss vorgetragen werd, und eine Methode selbst. Die Buchstaben sind Repräsentanten einzelner Elemente. Ich kann sie verbinden nach mancherlei Weise

a, b, c, d
aa, ab, ac, ad

die Verbindung ist unbestimmt wodurch nicht mehr ad. sondern sie kann alles sein

Die Verbindung von 2 verschied: Elementen geschieht doppelt zu verstehen weil ich mir bald dies bald jenes denken. Diese Teile können entweder einerlei bedeuten oder nicht. Alle möglichen Verbindungen zu 2 Elemente unter a, b, c sind

a, b, c
aa ab ac
ba bb ba
ca cb cc

Ich kann mir nun Verbindungen mit 3 Elem: denken indem ich den Verbind. zu zweien einzelne Elemente vorsetze und anhänge

aaa aab aac aba, abb, aba, aca, acb, acc
bba bbb bba baa bab bac bca bcb bcc
cca ccb ccc cba cbb cba caa cab cac

Ebenso bilde ich Verbindungen zu 4, 5, m Elementen. Welche Verbindungen nennt man Combinatorische Variationen. um sie vom Variat. höhern Calculs zu unterscheiden

diese Verbindungen kann ich nun auch Producte nennen. Da hierbei aber die Unterscheidung ab u. ba unnütz, wie aab, aba, aab Scheidet man in diese Hinsicht alle überflüssigen Verbindungen, so bleiben nur wohlgeordneten Verbindungen

a, b, c, d							
aa	ab	ac	ad	aaa	aab	aac	aad
	bb	bc	bd		abb	abc	abd
		cc	cd			acc	acd
			dd				add
					bbb	bbc	bbd
						bcc	bcd
							bdd
						ccc	ccd
							cdd
							ddd

Solche Verbindungen nennt man Combinationen

Die Zahl der Elemente in einer Verbindung bildet die Classe der Verbindungen

Ich kann nun für abc alle möglichen Versetzungen machen um zu wissen welche Verbindungen in der Variationklasse vorkommen

abc
acb,
cab,
acb
bac
bca

Dieses nennt man Permutation

Diese 3. Operationen bilden die Lehre der combinatorischen Analysis und im Variiren sind alle übrigen Verbind. vorhanden

Hieraus ergibt sich, daß wenn man die Combinationen permutirt, sich die Variationen ergeben. (III)

Wir unterscheiden Verbindungen mit und die ohne Wiederholung.

Das Lottospiel welches [illegible] sind es, da von vorher 90 [illegible] gebildet werden, ist nun ein Beispiel der Comb. mit Wiederhol. daher sind 90 Nummern und [illegible] 1, 2, 3 gezogen in bestimm. Ordn. so sind es Variat. ohne Wiederholg.

$\overset{4}{C}_{m\,(a,b,c\ldots q)}$ ist die 4te Cl. der Combin. aus m Elem. und zwar aus a,b,c…q.) Wenn es um Elemente nicht zu thun ist bezeichnet man das letztere [illegible]. Die Classe deutet die Anzahl der Elemente in einer Complexion (!) deutet die Wiederholg. Wie man verbindet ist Sache der [illegible] Lehre. Die Zahl der Verbindg. zu finden, ist Sache der Arithmetik.

$\overset{4}{V}_{(a,b,c,d)}$ deutet die 4. Var. Cl. aus Elem: a,b,c,d.

$\overset{4}{P}$ deutet 4 Elemente zu permut.

Indem bei Comb. u. Var. wiederholt wird ohne Rücksicht ob wiederholte Elem. gegeben sind, so findet bei Permut. Wiederhol. nur dann statt, wenn schon wiederholte Ausdrücke da sind.

numerus specierum — Hindenburg in Leipzig erfand die combinat. [illegible] so genannt.

$N.S.\ \overset{m}{P} = m!$

$N.S.\ \overset{m}{P}'_{(a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}\ldots)} = \frac{m!}{(\alpha!\beta!\gamma!\ldots)}$

3) Nr. $\overset{m}{\underset{(n)}{V}} = n^{m|-1}$

4) Nr. $\overset{m}{\underset{(n)}{V'}} = n^{m}$

5) Nr. $\overset{m}{\underset{(n)}{C}} = \frac{n^{m|-1}}{m!}$

6) Nr. $= \overset{m}{\underset{(n)}{C'}} = \frac{n^{m|1}}{m!}$

Beweise dieser Formeln

Die erste Bsp: Es seien m verschiedene Elem: gegeben. Wir nehmen erst 1 Elem a, das gibt 1 Anordnung = 1!
2 Elem: a, b, geben 2 Anordnung = 2!
3 Elem: a, b, c von den 3. kann jeder die erste Stelle und die andern 2 werden wieder auf 2fach angeordnet ich bekommen also 2·3 = 3! u. s. f.

für $a a_1 b b b_1 b_2 c c c_1 c_2 c_3 d$

2 formel. $m=10$, $\alpha=2$, $\beta 3$, $\gamma 4$. denken wir zu erst alle Elem: verschieden so geben sie 10! Von diesen Anordnungen hebe ich irgend eine heraus z. B. $c_1 a c b_1 c_3 b_1 c_2 a_1 d b$ oder wo $c_1 c\, c_3 c_2$ denke ich mir alle Versetzungen in ihren Stellen gedruckt ich schreibe sie auf und die übrigen buchst. in ihren Stellen, so bekomme ich außer der 1 Anordnung zusammen 4! Anordnungen die in den Anordnung von 10! enthalten sind. Sind nun die Elem: $c_1 c\, c_3 c_2$ nicht mehr verschieden so sind die Anordnung 4! nicht mehr verschieden sondern geben nur 1 Anordnung. Nun kann ich andere Anordnungen von den 10! Verbindungen herausheben und in jeder kommen die 4 c vor und es leuchtet sich eben so zeigen, daß die 4! Anordnungen zu viel sind, man muß die c also gleich betrachtet, oder nun jede Verbind von den 10!

ich bekomme also nur $\frac{10!}{4!}$ denkt man sich die b und a besonders so wiederholt man es auch mit den b und c b und der Rest ist derselbe.

4te formel. denkt man sich 7 Elem:

114 Dtn: formel. dankte ich mir 7. Elem: halte jedem das a zwei

Bei Ordnung der Combinationen mit Wiederhohl[ung] setzt man den einzelnen Elementen oder ihren Verbindungen, einzelne Elemente vor, die aus genommen, wo keine einge mischte Verbindung entstehen würde, welche die Permutation zustellt. z. B.

a, b, c, d, e	5
aa ab ac ad ae	5
bb bc bd be	4
cc cd ce	3
dd de	2
ee	1

$S_1^5 = t_2^5$

Setze nun erst das a vor den binionen so erhalte ich t_2^5 ternen, setze ich b vor so muss ich die erste Reihe weglassen und bekomme also t_2^4 setze ich aber c vor, übergehe die 2 ersten Reihen und bekomme die Summe der 3 ersten Zahlen der figur. Reihe $= t_2^3$ setze ich d vor so bekomme ich t_2^2 und setze ich e vor bekomme ich t_2^1 und erhalte also $t_2^5 + t_2^4 + t_2^3 + t_2^2 + t_2^1$ ternes d. h. die Summe der ersten 5 Glieder der 2ten Ord fig. Reihe einstweilen zulassen $= S_2^5 = t_3^5$
So bekomme ich bei quaternen mit Wied.:

$$t_3^5 + t_3^4 + t_3^3 + t_3^2 + t_3^1 = S_3^5 = t_4^5$$

Hat man m Elemente so ist die Reihe dieselbe und ich erhalte $m + (m-1) + (m-2) \text{------} 1. = S_1^m = t_2^m$

Anwendungen.

$(a+b)^m$ in einfachster Form dargestellt

$(a+b)^2 = aa+ab+ba+bb$. oder die 2 Classe der Variationen mit Wiederholung aus 2 Elementen $= \overset{2}{V}'_{(a+b)} = 2^2$

$(a+b)^3 = aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb = \overset{3}{V}'_{(a+b)} = 2^3$

$(a+b)^m = \overset{m}{V}'_{(a+b)} = 2^m$ wenn ich die Verbindungen als Producte ansehe und sie zu einander addire. —

Die Variationen sind aber Combinationen mit Permutation; ich werde also nur die Form $(a+b)^m$ verschaffen wenn ich aus a u b Combinat. bilde und jede solche Combinat. versetze, da nun die Versetzungen gleiche Producte geben so multiplizire ich eine Combination durch zahl der Permutationen statt daß ich die einzelnen = Producte addire. Dies ist also zu machen.

$a^{m-r} \cdot b^r$ denken wir statt r, alle Zahlen gesetzt von 0 bis m, und was auch r werden kann so gibt $m-r+r=m$. mithin ist die $a^{m-r} \cdot b^r$ Verbindung der Repräsentant jeder Verbindung

wie oft sich $a^{m-r} \cdot b^r$ versetzen läßt, ist zu sehen

die Versetzungen sind $\frac{m!}{(m-r)! \cdot r!}$ also ist

$\frac{m!}{(m-r)! \cdot r!} \cdot a^{m-r} \cdot b^r$, der Repräsentant aller einzelner Glieder von $(a+b)^m$ und ist

11f.

die Summe der Ausdrücke = S, so ist

$(a+b)^m = S\left(\frac{m!}{(m-\alpha)!\cdot\alpha!}\, a^{m-\alpha}\cdot b^{\alpha}\right)$ dies ist der binomische Lehrsatz wenn m eine ganze Zahl ist es ist der Verbindungssatz der niedern und höhern Analysis. Wir wollen ihn nun in den verschiedensten Formen sehen. — Oder

$a^{\alpha}\cdot b^{b}$ sobald $\alpha+b=m$ wenn ich statt α oder b (indem sich eins aus dem andern ergiebt) von 0 bis m Werthe gesetzt mir denke) der Repräsentant aller Combinationen mit Wied: und $\frac{m!}{\alpha!\,b!}$ giebt die Zahl der Permut. und $\frac{m!}{\alpha!\,b!}\cdot a^{\alpha}\cdot b^{b}$ ist der Repräsentante jeder der V' und $S\left(\frac{m!}{\alpha!\,b!}\, a^{\alpha}\cdot b^{b}\right)$ = aller V' aus a und b $=(a+b)^m$ z. B. $m=4$ und $\alpha+b=4$

$(a+b)^4 = S\left(\frac{4!}{\alpha!\,b!}\, a^{\alpha}\cdot b^{b}\right)$ Wir setzen statt $b=0$ so ist $\alpha=4$

$S\left(\frac{4!}{4!\,0!}\, a^4\cdot b^0\right) = a^4$. Wir setzen statt $b=1$ — $\alpha=3$

$S\left(\frac{4!}{3!\,1!}\, a^3\cdot b^1\right) = 4a^3b^1$ ——— $b=2$ — $\alpha=2$

$S\left(\frac{4!}{2!\,2!}\, a^2\cdot b^2\right) = 6a^2b^2$ ——— $b=3$ — $\alpha=1$

$S\left(\frac{4!}{1!\,3!}\, a^1\cdot b^3\right) = 4a^1b^3$ ——— $b=4$ = $\alpha=0$

$S\left(\frac{4!}{4!\,0!}\, a^0\cdot b^4\right) = b^4$ also

$(a+b)^4 = S(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)$ dasselbe giebt $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$

118. Die formel ist deshalb bequem, weil man nicht allen Gliedern braucht, sondern be- stimmen, und wir erhalten das x^{te} Glied wenn man $\alpha = x$ und $b = m - x$ setzen

Damit ist die Theorie der facult. in Verbindung.

$$m! = (\alpha + b)! = 1^{\alpha + b|1} = 1^{\alpha|1} \cdot (\alpha+1)^{b|1} = \alpha! \cdot (\alpha + b)^{b|-1}$$

also $$(a+b)^m = S\left(\frac{(\alpha+b)!}{\alpha!\, b!} \cdot a^\alpha b^b\right)_{\alpha+b=m} = S\left(\frac{(a+b)^{b|-1}}{b!} a^\alpha \cdot b^b\right)_{\alpha+b=m}$$

Setzt ich statt $\alpha = m - b$ wird

$$(\alpha+b)^m = S\left(\frac{m^{b|-1}}{b!} \alpha^{m-b} \cdot b^b\right)$$ und hier hatte die Bedingung $\alpha + b = m$ fehlen. Es stehts in Lehrbüchern nur in einzelnen Gliedern

da $\frac{m^{b|-1}}{b!} = m_b$ so ist $(a+b)^m = S(m_b \cdot a^{m-b} \cdot b^b) = S(m_b \cdot a^b \cdot b^{m-b})$

Ich will $(a+b+c+d)^m$ entwickeln so ist also $V^{m|1}_{(a+b+c+d)} = C^{m|1}_{a+b+c+d}$ wenn ich einzelne Comb: per- mutire oder jede Combin: mit permutat. coef. gleich multipliciren

Wir stellen daher einen allg. Represent. der Combinationen dar ist $a^\alpha \cdot b^b \cdot c^c \cdot d^d$ wenn $(\alpha + b + c + d) = m$ ist dann setzt man $\alpha \neq 0$ $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$

denn $\alpha = 2, 3,$ bis m, wo sich $\alpha, b, c,$ auch ändern so daß ihre Summe $= m$ wird zu erhalten aus allen mögl. combinationen. Dieser Representant zur Versetzt $\frac{m!}{\alpha!\, b!\, c!\, d!}$ wie leicht anzusehen ist

dieser $\left(\frac{m!}{\alpha!\, b!\, c!\, d!} \cdot a^{\alpha} \cdot b^{b} \cdot c^{c} \cdot d^{d}\right)_{(\alpha+b+c+d)=m}$ der Representant jeder Var' dieser

$$S\left(\frac{m!}{\alpha!\, b!\, c!\, d!}\, a^{\alpha} \cdot b^{b} \cdot c^{c} \cdot d^{d}\right)_{\alpha+b+c+d=m} = (a+b+c+d)^m$$

das ist der quadrinomische Satz woraus man nun sehen auch den polynomischen sich entwickelt

Das Arbeiten mit solchen Representanten muß eingeübt werden z. B.

$(a+b+c)^m = S\left(\frac{m!}{\alpha!\, b!\, c!}\, a^{\alpha} \cdot b^{b} c^{c}\right)_{\alpha+b+c=m}$ Wüßte ich nun

daß $(a+x)^m = S\left(\frac{m!}{\alpha!\, \tau!}\, a^{\alpha} x^{\tau}\right)_{\alpha+\tau=m}$ so könnte ich den Trinom

daraus ableiten wenn ich $x = (b+c)$ setzte so hätte

ich $(a+b+c)^m = S\left(\frac{m!}{\alpha!\, \tau!}\, a^{\alpha} \cdot (b+c)^{\tau}\right)_{\alpha+\tau=m}$ Nun kenne ich

das binomium von $(b+c)^{\tau} = S\left(\frac{\tau!}{b!\, c!}\, b^{b} c^{c}\right)_{b+c=\tau}$ also

$(a+b+c)^m = S\left(\frac{m!}{\alpha!\, \tau!}\, a^{\alpha} \cdot \frac{\tau!}{b!\, c!}\, b^{b} c^{c}\right)_{\alpha+\tau=m \mid b+c=\tau}$ nun schreib ich Streubuchstaben so schreib ich (nach b, c allen möglichen Werthen schreiben) die Einzelnen Glieder durch $\frac{m!}{\alpha!\, \tau!}$ multiplizirt.

120. Gesucht ist $(a+b+c)^m = S\left(\frac{m!}{a!\,b!\,c!}\, a^a . b^b . c^c\right)$
$a+\tau=m \mid b+c=\tau$

$a+b+c=m$ dieser Ast entsteht die beiden Ast. nicht ich brauche noch nur die beiden Wege ich nehme dazu $b+c=\tau$ dieser Asts zeigt aber nur welchen Werth das τ hat, es aber kommt in der Asts nicht vor daher ist die Ast. nicht nöthig und es wird

$$(a+b+c)^m = S\left(\frac{m!}{a!\,b!\,c!}\, a^a . b^b . c^c\right) \quad a+b+c=m$$

Will ich $(a+b+c)^4$ nach der formel entwickeln d.h. alle Glieder hinschreiben, so muss ich alle Werthe feststellen die die $a+b+c$ haben können ~~wenn~~ so dass ihre Summe $=4$ ist. Diese Aufgabe ist obgleich ähnlich um wohlgeordnete oder allmögliche Anordnungen der Summanden zu haben. Diese 2 Aufgaben heissen discerptiones ~~complexionen~~ problems die Euler im letzten Capitel des 1 Th. der combinatorischen Analysis durchführte. Jetzt wird man für Combinationen und Variationen zu bestimmten Summen.

Summen. $a, b, c = 4$

wohlgeordnete
0 0 4 vermindert den drittletzten um 1 und vergrößert den
0 1 3 vorletzten um 1 so weit als die
0 2 2 Wohlordnung erlaubt
jetzt weiter 1 1 2
~~1 2 0~~ geht nicht weil es keine wohlgeordnete ist

Variationen zur Klasse erhalten wenn man ... direct oder ... 121
wenn jene permutirt

Bei unserer Aufgabe sind die Variationen nöthig, weil a, b, c alle mögliche Stellen annehmen

Dieses Verbinden mit Repräsentanten vorzüglich Professor Rode zu Erlangen dessen Schüler Ohm ihn ausgebildet.

II Anwendung

$(a+bx+cx^2+dx^3)^m$ man es die einzelnen Glieder nach x geordnet haben d.h. alle die Glieder die das x in derselben Potenz enthalten zusammenfassen im 1. Ausdruck. Nach dem Vorigen ist

$$\underset{=A}{(a+bx+cx^2+dx^3)^m} = S\left[\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}\,a^{\alpha}\,(bx)^{\beta}\,(cx^2)^{\gamma}\,(dx^3)^{\delta}\right]_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=m}$$

weil aber die einzelnen Glieder producte sind so potenzirt man jeden Factor und es wird =

$$= S\left[\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}\,a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot x^{\beta}\cdot c^{\gamma}\cdot x^{2\gamma}\cdot d^{\delta}\cdot x^{3\delta}\right]_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=m} = S\left[\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}\,a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot c^{\gamma}\cdot d^{\delta}\cdot x^{\beta+2\gamma+3\delta}\right]_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=m}$$

Um nun ordnen nach Potenzen v. x. so setze ich $\beta+2\gamma+3\delta = q$ welches nun 0 oder ganze Zahl repräsentirt dann wird $A = S\left[\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}\,a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot c^{\gamma}\cdot d^{\delta}\cdot x^{q}\right]_{\beta+2\gamma+3\delta=q,\ \alpha+\beta+\gamma+\delta=m}$

Nun sind die Glieder nach x geordnet. nämlich setz ich statt $q = 5$ so erhalte ich einen Ausdruck der alle Glieder anzeigt, welche x^5 enthalten. Stelle ich das 4te Glied ~~dar~~ wo x^3 vorkömmt

122 Es bilden sich 2 Gleichungen

$$1)\quad a+b+c+d=4$$

Aufl. $$2)\quad b+2c+3d=5$$

	a	b,	c,	d
L	0	3	1	0
	1	1	2	0
	1	2	0	1
	2	0	1	1

Alle diese Werthe entsprechen den beyden Gleichungen

Ich setze nun in die Gl. $S\left[\frac{m!}{a!\,b!\,c!\,d!}\,a^{a}\,b^{b}\,c^{c}\,d^{d}\,x^{[illegible]}\right]$

die Werthe $m=4$, $x=5$ und a, b, c, d erhalten der Reihe nach die Werthe aus L.

Zu Anwendungen hievon sollte man das allgemeine Glied der m^{ten} Potenz und dessen ... die Formel ...

III. Anwendung $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\cdots$ zu entwickeln.

$$\begin{array}{l} x+a \\ x+b \\ \hline x^2+(a+b)x+ab \end{array}$$ hier kann man a und b vertauschen ohne das Prod. zu ändern

$$\begin{array}{l} x+c \\ \hline x^3+(a+b)x^2+ab\,x+\;cx^2+(a+b)cx+abc = \end{array}$$

$$= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$$ hier ändert sich das Prod. nicht wenn man sich ab, ac, bc vertauscht.

Die einzelnen Coeff. sind Functionen von a, b, c und zwar symmetrische weil sie sich nicht ändern, wenn man sie ganz mit einander verwechselt. Bemerkt ich also daß der Coeff. eine symmetr. Function, so bin ich überzeugt daß der Coeff. richtig ist, sonst könnte man ein andres setzen lassen, und das Prod. würde sich ändern. Daher kann ich gleich den Schluß von $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ entwickeln, das erste Glied x^4, dann wird das 2te x^3 mit Coeff. der Summe $(a+b+c+d)$ das 3te Glied x^2 mit Coeff. die Comb. ohne Wiederh. zu 2 von diesen Elem. u. s. f. Der letzte Coeff. ist das Prod. abcd. Also allg.:

$$(x+a)(x+a_1)(x+a_2)\cdots\cdots(x+a_m) =$$

$$= \sum\left[\overset{r}{C}_{(a_1,a_2\ldots a_m)}\cdot x^{m-r}\right]_{r+b=m}$$ wenn man r setzt von allen Werthen von 0 bis m setzt.

124 $x^m + \overset{1}{C} \cdot x^{m-1} + \overset{2}{C} \cdot x^{m-2} + \overset{3}{C} \cdot x^{m-3} + \dots + \overset{m-1}{C} \cdot x + \overset{m}{C}$
$(a_1 a_2 a_3 \dots a_m)$

ist der allg. Ausdr. welcher in höheren Gleichungen vorkommt z. B.

$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} \dots + A_{m-1} x + A_m = 0$

so kann ich diese Gl. zerlegen in Factoren von der Form $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\dots(x+a_m)$ und es wird zu bestimmen seyn $a_1\ a_2\ a_3 \dots a_m$

Wir sehen daß jeder Ausdruck der die Gl. zu 0 macht in jedem Factor enthalten ist, daher [illegible]

Wir hatten den Satz $(a+b)^m =$

$= a^m + m_1 a^{m-1} b + m_2 a^{m-2} b^2 \dots + m_p a^{m-p} b^p + \dots$

woraus auch $(a+b)^m = S\left[m_\nu\, a^{m-\nu} \cdot b^\nu\right]$

da $(a-m)^n = (a+(-m))^n$ so gilt auch der Satz für negative Binomium d. i.

$(a-b)^m = S\left[(-1)^\nu \cdot m_\nu\, a^{m-\nu} \cdot b^\nu\right]$

Digression $(-1)b^\tau$ deutet an $[\pm(-b)^\tau$ wenn τ eine gerade Zahl ist $+$ wenn τ ungerade Zahl ist $-]$ nach [illegible] Thrales in Archiv der Math. J. 1820 u 1821 [illegible]

$\cos \nu\pi = (-1)^\nu$ dabei gilt wenn ν eine ganze Zahl ist, [illegible] aber $\nu = \frac{1}{2}$ so ist $\cos \frac{1}{2}\pi = \cos 45^0 = (-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ da $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$ so ist $0 = \sqrt{-1}$ welche Inconsequenz

125

Wir suchen nun das Binom auch [auf] Facultaeten anzuwenden $= A$ nehmlich ob $(a+b)^{m|d}$ $=$ ist $S\left[m_r\, a^{m-r|d}\, b^{r|d}\right]$

Vandermondischer [illegible]

dieser Satz gilt wenn $m=0$ oder absolute ganze Zahl ist. Hätten wir d6 [illegible] gewünscht, so würden wir $d=0$ setzen und unser Binom würde sich ergeben. Ist m negat. dann ist eine unendliche Reihe, deren Summe nicht eine Zahl ist, und mit einer Nichtzahl kann man nicht verbinden. Ist m eine gebrochene Zahl so gilt der Satz nicht. Denn ist $A =$ einer (ad) gebrochenen Zahl $=$

$= (a+b)^{m|d}$.

Gram und Greller nehmen die Formel für alle m als richtig.

Wir die Summe der Reihe sucht wird und es entsteht ein Ausdruck von der Form B

Beweis des Satzes.

Es soll $(a+b)^{m|d} = a^{m|d} + m_1 a^{m-1|d} \cdot b^{1|d} + m_2 a^{m-2|d} b^{2|d}$
$+ \dots\dots\dots$

bewiesen werden.

Die Beweismethode besteht im hingeschobenen Beispiel ... wenn die Gl gilt für einen Exp. h die ich für m setze, so gilt sie auch für h+1 die ich für m setze.

$(a+b)^{h|d} = a^{h|d} + h_1 a^{h-1|d} \cdot b^{1|d} + h_2 a^{h-2|d} \cdot b^{2|d} + \dots\dots$

diese Gl: setz ich voraus für den bestimmten Exp. h. Um nun zu wissen ob sie gilt für $m = h+1$ multiplizier ich links und rechts beid fact der nächsten letzten Factor. Das letzte Glied $(a+b)+(h-1)d$ der nächste letzte Factor ist also $(a+b+hd)$ damit multiplizir ich meine Gl: und bekomme links $(a+b)^{h+1|d}$ weil $(a+b+hd)$ sich an den letzten Factor von $(a+b)$ anschliesst. Multiplizir ich rechts muss ich sorgen daß sich die Multipl. an den Facultäten der Glieder anschliessen, so daß der Multiplicator immer der folgende Factor wird. $a^{h|d} \cdot a+b+hd =$

$a^{h|d} \cdot \left[(a+hd)+b\right]$ nun schliesst sich $a+hd$ als nächster letzter Factor an a und gibt

$a^{h+1Id} + a^{hId}.b$ zu multipl. 127

$h, a^{h-1Id}.b^{1Id}$ zu erst mit $a+(h-1)d$ dann mit $b+d$ dann $a+(h-1)d$ schlingt sich um a^{h-1Id}, ein und ich erhalte

$h, a^{hId}.b^{1Id} + h, a^{h-1Id}.b^{2Id}$

weil $b^{1Id}.[b+d] = b.[b+d] = b^{2Id}$

Das 2te Glied multipl. zu erst mit $a+(h-2)d$ dann mit $b+2d$

von a^{h-2Id} schlingt sich $a+(h-2)d$ und giebt a^{h-1Id}, ebenfalls bez. d b^{2Id} selbst muß ich noch mit $b+2d$ zu multipl.

$b^{2Id}.[b+2d] = b.[b+d][b+2d] = b^{3Id}$

und erhalten also den 3ten Glieder

$+h_2 . a^{h-1Id}.b^{2Id} + h_2 a^{h-2Id}.b^{3Id}$

So fahre ich fort. Ich addire nun die einzelnen Glieder zu anwenden und behalten

$$(a+b)^{h+1|d} \; a^{h+1|d} + (h+1)\,a^{h|d} \cdot b^{1|d} + (h_2+h_1)\,a^{h-1|d} \cdot b^{2|d} +$$

$$+ (h_3+h_2)\,a^{h-2|d} \cdot b^{3|d} + \ldots\ldots\ldots$$

Da nun $h_m + h_{m-1} = (h+1)_m$ weil dann früher [illegible] so verwandelt sich

$(h_2+h_1) = (h+1)_2$, $(h_3+h_2) = (h+1)_3$ so daß also

$(a+b)^{h+1|d}$ ganz identisch in Entwickelung

mit $(a+b)^{h|d}$.

Digression. daß $h_m + h_{m-1} = (h+1)_m$

$$\left.\begin{aligned} h_m &= \frac{h^{m|-1}}{m!} \\ h_{m-1} &= \frac{h^{m-1|-1}}{m-1!} \end{aligned}\right\} \text{beydes addirt giebt} = \frac{m\,h^{m-1|-1}}{(m-1)!\,m = m!}$$

$h^{m-1|-1}$ ist gemeinschaftlicher factor man muß ihn nur oben herausheben weil

denn $h^{m|-1} = h^{m-1|-1} \cdot (h-m+1)$

ist der weitere [illegible] factor :

129.

ich bekomme also $\frac{h^{m|I|-1}(h+1)}{m!}$ das

ist die Summe aber (h+1) gehört

sich an den vorigen factor an

und giebt $\frac{(h+1)^{m|I|-1}}{m!} = (h+1)_m$

Fortsetzung des Beweises

Wir wollten den Lehrsatz beweisen der gesetzt, so dass wenn $(a+b)^{h|d}$

$(a+b)^{h+1|d}$ zu erhalten so muß ich

$(a+b)^{h|d}$ also auch die beiden Seiten

mit dem nachfolgenden factor

zu multipl. und der Satz ergab

sich als bewiesen

Nun setze ich statt $m=1$ und die formel verwandelt sich

$(a+b)^{1|d} = a^{1|d} + 1a^{0|d}. + 0.$

also $(a+b) = (a+b)$

Mithin ist der Satz bewiesen

ganz streng.

dieser Weg der vollkommenen Induction durch die Eulerische Induction nunmehr, zeigt nicht sobald er nicht mehr ganze absolute Zahl ist.

Doch um den Beweis gründlich zu führen müssen man nicht mit 2, 3, 4 Cylindern arbeiten, sondern mit dem Representanten aller Cylinder. Der Beweis ist nun folgender mit dem Representanten der Reihe. Es ist zu beweisen

$$(a+b)^{m|d} = S\left[m_b\, a^{m-b|d} \cdot b^{b|d}\right]$$

Ich schreibe den Lehrsatz und setze voraus daß man $m = h$ setzt

$$(a+b)^{h|d} = S\left[h_b\, a^{h-b|d}\, b^{b|d}\right]$$ multiplicire mit $a+b+hd$

und bekommen $(a+b)^{h+1|d}$ links

Um rechts zu multipliciren zerlege ich $a+b+hd$ in 2 Theile $a+[h-b]d$ und in $b+bd$ und bekomme

$S\left[h_b\, a^{h+1-b|d}\, b^{b|d}\right]$ das bildet eine Reihe

multiplicire ich mit $b+bd$ bekomme ich $S\left[h_b\, a^{h-b|d}\, b^{b+1|d}\right]$

die 2 sind aneinander zu addiren und geben

da b_0 das 1te Glied, b_1 das 2te ist u. s. f.
so würde b im 1ten Ausdruck u. b im
2ten Ausdruck denselben Gliedern geben
die lassen sich aber nicht vereinigen
weil die Coeffic: verschieden sind. Ich suche
nun einander zu verschieben (nicht 7ten mit 7ten
Gl. aber 8ten mit 7ten zu verbinden)
Ist b der Representant aller Zahlen von
0 bis ins unendliche, so ist ~~man b auch alle~~
~~Zahlen vorstellen~~ b_0 das 1te Glied und
b_{b+1} ist jedes andere Glied denn
ist $b=0$ so ist $b_{0+1} = b_1$ also d. 2te Gl.
u. s. f.

der Satz ist 374§ formel 3. S. 46.

Setzt nun in $S\, h_b a^{h+1-b}$ u. s. f.
statt $b, =0$ ~~so erhalten~~ denn $b = b+1$ ich

$$a^{h+1Id} + S\left[h_{b+1}\, a^{h-bId} \cdot b^{b+1Id}\right]$$ dazu kommt der 2te Summe

$$+ S\left[h_b\, a^{h-bId} \cdot b^{b+1Id}\right]$$ nun ist der 2 u. 3te Ausdruck

einerlei factoren und bildet das $(m+1)^{te} + m^{te}$ Glied
ich bekomme also:

$$a^{h+1Id} + S\left[(h_{b+1} + h_b)\, a^{h-bId} \cdot b^{b+1Id}\right]$$

da nun $h_{b+1} + h_b = (h+1)_{b+1}$ so wird

132.

$$(a+b)^{n+1|d} = a^{n+1|d} + S\left[(n+1)_{b+1} \cdot a^{n-b|d} \cdot b^{b+1|d}\right]$$

Jetzt kann ich das erste Glied hineinbringen indem ich den Lehrsatz anwende das umzukehren ist denn § 374 form 3. nemlich der Formel 4.

Ich setze nur $b = b-1$ und bekomme

$$S\left[(n+1)_b\, a^{n+1-b|d}\, b^{b|d}\right] - a^{n+1|d}$$

und ich bekomme also

$$(a+b)^{n+1|d} = S\left[(n+1)_b\, a^{n+1-b|d} \cdot b^{b|d}\right]$$

welche wenn oben für n gilt, gilt jetzt für $(n+1)$. Der Lehrsatz ist zu Ende. — Merkwürdiger [illegible] Lehrsatz sich ergiebt

Folgerungen des Satzes

Zuerst betrachte ich etwas Facultaet, und ich kann die Sätze auf binominal Coeffi. anwenden

Wenn $(a+b) = m$ so ist $\frac{(a+b)!}{a!\,b!} = (a+b)_a = (a+b)_b$ $= m_a = m_b$, was sich ergiebt wenn

$\frac{(a+b)!}{a!\,b!}$ durch a! oder b! Zeichen im Nenner weggedividirt so bekommt ich $(a+b)_a$ oder $(a+b)_b$ ——

also unser Lehrsatz lautet

$$(a+b)^{m|d} = S\left[\frac{(a+b)!}{a!\,b!} \cdot a^{a|d} \cdot b^{b|d}\right]_{a+b=m}$$

ich kann nun links und rechts durch m! dividiren

$$\frac{(a+b)^{m|d}}{m!}$$

= der Represent: soll nun durch m! dividirt werden, statt aller einzelnen Glieder dividirt m. sollen. Hier gebrauch ich dass $a+b=m$, also ich bekomme $= S\left[\frac{1}{a!\,b!}\, a^{a|d} \cdot b^{b|d}\right]_{a+b=m} =$

$$= S\left[\frac{a^{a|d}}{a!} \cdot \frac{b^{b|d}}{b!}\right]_{a+b=m}$$

ist nun $d=-1$ so ist der Satz so $(a+b)_m = S\left[a_a \cdot b_b\right]_{a+b=m}$

also ein Lehrsatz für Binomialcoefficienten ——

Dieser Satz wird angewendet beim Be-
weise des binomischen Satzes für negative
Exponenten. –

Die Lehre der höheren Gleichungen

besteht in der am gelehrten Frage wie
man $(x+a)(x+b)(x+c)$ .... in eine allg.
function verbindet. ähnlich ds Product
wieder in die factoren zu zerlegen.
Ist eine Lehre der interessantesten
ingeniösesten Gedanken. Cf. La Grange Theorie
de l'équation. die höheren Gleichung an
wenden in der Praxis nicht bekannt.
Cf. Eulers Einleitung zur Lehre d. Unendlichen
und seine Memoires de l'academie.
die Theorie besteht 1. in der frage ob
jede höhere Gleichung eine Auflösung zu-
läßt wenn den Gl. ganz allg. ist
bei der quadr. Gl. $x^2+Ax+B=0$ so ist
$x=-\frac{1}{2}A\pm\sqrt{\frac{1}{4}A^2-B}$. Diese Frage ist
[illegible] und beantwortet worden
Ist die Gl. $x^7+Ax^6+Bx^5+Cx^4+Dx^3+Ex^2+Fx+G=$
giebt man dem x und A, B, C, D, E, F be-
stimmte Werthe so ist G einem Werthe der
statt G gesetzt die Gl. zu 0 bringt.

geben ich dann G den aus gemittelten Werth und lasse x unbestimmt, so muss x den Werth haben, den ich ihm hier gegeben, der von G abhängt, und läßt sich zeigen, daß der Werth von x zu allen Coeff A, B, C, G abhängt, und es giebt eine Zusammensetzung, die mittelst all arith: Operationen natürlich, die statt x gesetzt die Gl: identisch macht.

II Frage, wie viel Werthe für x giebt die einer Gl vom m^{ten} Grade genügen?

Wenn zeigt man α ein Werth ist der statt x ges. die Gl id: macht, so wird

$$\alpha^7 + A\alpha^6 + B\alpha^5 + C\alpha^4 \ldots\ldots + G = 0$$

und dieses vom ursprünglichen Gl subtrahirt giebt

$$(x^7 - \alpha^7) + A(x^6 - \alpha^6) + B(x^5 - \alpha^5) + \ldots\ldots + F(x - \alpha) = 0$$

nun lässt sich jede Klammer durch $(x-\alpha)$ ohne Rest dividiren und es entsteht nämlich eine 6ten Grade. diese Gl: hat für $x = \beta$ als Werth u. s. f. so daß ich die Function von 7ten Gr in 7 Factoren zerlegt und es giebt 7 Werthe. also m Werthe hat jede Gl. m^{ten} Grades es giebt nicht mehr als m Factoren denn der $(m+1)^{te}$ müßte die Gl: id: machen

176. also müsste einer der m^{ten} Werthe sein. Im speciellen können einige oder alle Werthe gleich sein. Die Werthe heissen Wurzelwerthe. Bin ich nicht im Stande diese zu finden, so muss ich wissen von welcher Form sie sind reell oder imaginär, oder noch anders. Lagrange hat bewiesen den Satz, daß wenn die Coeff reell sind so ist jeder der m Wurzelwerthe entweder reell oder ist er imaginär so ist er immer $= p + q\sqrt{-1}$ wo p u. q reell sind.

Nachweis der Gl. lässt sich reduciren auf $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ ..... welche ein Werth von β oder statt x gesetzt muss einen factor zu 0 machen also = sein entweder α, $= \beta$ oder $= \gamma$ u. s. f.

Wir haben nachgewiesen daß $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots =$

1) ist $x^m - C^1 x^{m-1} + C^2 x^{m-2} + C^3 x^{m-3} + \ldots \pm C^m$ $(\alpha, \beta, \gamma \ldots)$

2) die neue Gleich. ist $x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots A_m = 0$ die aufgelöst werden soll so zerlegen wir sie ~~so daß~~ nach obigem bis drei Wurzelwerthe in $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots$

folglich ist die funct 1) u. 2) dieselben so ist $-C^1 = A_1$ daher ohne die Wurzelwerthe zu kennen, kann ich die Summe $C^2 = A_2$ u. s. f. bis $C^m = (-1)^m A_m$ d. h. der bekannte Grad ist die m^{te} Comb aus m Elementen welche = dem Grad aller Wurzelwerthe

mit dem + Zeichen muss es gerade Zahl
ist — Zeichen muss es eine ungerade Z. ist.
Weiter giebt das letzte Gl: in Factoren
zerlegt giebt Wurzelwerthe. man muss
vorausgesetzt wird dß ganze Zahl x be-
deuten soll. und hab ich einen Factor
gefunden der $= \alpha$ ist. so dividir ich durch
$x-\alpha$ und erhalte eine Gl. um einen
Grad niedriger. Cf. III Band der Institutiones
Eulers zur Analysis des Unendl: der Berliner
Memoiren Cf LaGrange. theorie de résolution
numeriques.
La Grange hat gefunden daß die Coeff
A_1 A_2 A_3 etc. die Wurzelwerthe ent-
hält aber in symetrischen Functionen
diese symetr: Functionen hat er so äußerst
behandelt, als er die Lehren gelernt
hat. und wollte man nicht einzelne
Werthe, durch ihre Zusammensetzungen
finden und stellte sich die Aufgabe
wie man aus einer Gl: eine gefundene
wird, so daß diese die Eigenschaft hat
daß die Summe je 2 Wurzelwerthe die
neuen Wurzelwerthe der 2 Gl: sind
z.B. die W. seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. so wird
die neue Gl: vom 6ten Grade seien, weil
es 6 Summen giebt und sie wird bestehen
aus $(z-\alpha+\beta)(z-\alpha+\gamma)(z-\alpha+\delta)\ldots$

138. nun multipl: er wirklich und bekamen eine Gl: des 6ten Grades, die Coeff wurden wieder symetr: functionen, und wendet er, wie jede symetr: Verbind. von α β γ δ zusammengesetzt werden kann, aus symetr: Verbind aus Comb zu 2 aus α β γ δ. So zeigte er wie man die Coeff der sechs: Gl. angeben kann ohne die Wurzeln zu kennen. —

<u>Digression zu Vl. 87.</u> die formel für ganze Potenzen ist

$$a^{m|d} = \left(a + (m-1)d\right)^{m|-d}$$

ist nun $m = \alpha - \beta$ so wird

$$a^{\alpha-\beta|d} = \left[a + ((\alpha-\beta)-1)d\right]^{\alpha-\beta|-d}$$

oder nach den Differenz Potenzen

$$\frac{a^{\alpha|d}}{\left[a+(\alpha-\beta)d\right]^{\beta|d}} = \frac{\left[a+((\alpha-\beta)-1)d\right]^{\alpha|-d}}{\left[a+((\alpha-\beta)-1)d+(\alpha-\beta)(-d)\right]^{\beta|-d}}$$

d. h.

$$\frac{a^{\alpha|d}}{\left[a+(\alpha-\beta)d\right]^{\beta|d}} = \frac{\left[a+((\alpha-\beta)-1)d\right]^{\alpha|-d}}{\left[a-d\right]^{\beta|-d}}$$

oder man nenne Zähl. u. N. nach form I um: wandelt.

129

giebt $\frac{\left[a + \beta d + (\alpha-1)d\right]^{\alpha I -d}}{\left[a+(\beta-1)d - \beta d\right]^{\beta I -d}} = \frac{(a-\beta d)^{\alpha I d}}{(a-\beta d)^{\beta I d}}$. denn $(\beta-1)d - \beta d = (\beta-1-\beta)d = -d$

soll nun $\frac{a^{\alpha I d}}{\left[a+(\alpha-\beta)d\right]^{\beta I d}} = \frac{(a-\beta d)^{\alpha I d}}{(a-\beta d)^{\beta I d}}$ seyn

so muss $\left[a+(\alpha-\beta)d\right]^{\beta I d} \cdot (a-\beta d)^{\alpha I d}$ oder um sie multiplicabel zu machen

$(a-\beta d)^{\alpha I d} \cdot \left((a-\beta d) + \alpha d\right)^{\beta I d}$ oder multiplicirt

$(a-\beta d)^{\alpha + \beta I d}$

gleich werden

$a^{\alpha I d} \cdot (a-\beta d)^{\beta I d}$ oder um sie multiplicabel zu machen

$(a-\beta d)^{\beta I d} \cdot (a-\beta d + \beta d)^{\alpha I d}$ oder ausgeführt

$(a-\beta d)^{\alpha+\beta I d}$

welches auch ist. —

$a^{m-n I d} = \frac{a^{m I d}}{(a+(m-n)d)^{n I d}}$ ist $m = \alpha-\beta$, $n = \gamma-\delta$

ist = ? die Quantität dieses Zeichens

? in der Erklärung solches ausge=

sprochen [?] wo [?] man diff: facult: ist.

$$a^{m+n\,I\,d} = a^{m\,I\,d} \cdot (a+md)^{n\,I\,d}$$ oder

$$a^{(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)\,I\,d} = a^{\alpha-\beta\,I\,d} \cdot (a+(\alpha-\beta)d)^{\gamma-\delta\,I\,d}$$ oder

$$a^{(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)\,I\,d} = \rule{3cm}{0.4pt}$$ oder

1) $$\frac{a^{\alpha+\gamma\,I\,d}}{(a+(\alpha+\gamma)d-(\beta+\delta)d)^{\beta+\delta\,I\,d}} =$$ 2) $$\frac{a^{\alpha\,I\,d}\,(a+(\alpha-\beta)d)^{\gamma\,I\,d}}{(a+(\alpha-\beta)d)^{\beta\,I\,d}\,(a+(\alpha-\beta)d+(\gamma-\delta)d)^{\delta\,I\,d}}$$

1) $$\frac{a^{\alpha\,I\,d}\cdot(a+\alpha d)^{\gamma\,I\,d}}{(a+(\alpha+\gamma-\beta-\delta)d)^{\delta\,I\,d}\cdot(a+(\alpha+\gamma-\beta-\delta+\delta)d)^{\beta\,I\,d}} = 2)$$

oder multiplicirt und dividirt man beyde Ausdrücke mit $a^{\alpha\,I\,d}$ und mit $(a+(\alpha+\gamma-\beta-\delta)d)^{\delta\,I\,d}$ wird

$$\frac{(a+\alpha d)^{\gamma\,I\,d}}{(a+(\alpha+\gamma-\beta)d)^{\beta\,I\,d}} = \frac{(a+(\alpha-\beta)d)^{\gamma\,I\,d}}{(a+(\alpha-\beta)d)^{\beta\,I\,d}}$$

den 2. Ausdrücke sind sich gleich, weil

$$(a+\alpha d)^{\gamma\,I\,d}\cdot(a+(\alpha-\beta)d)^{\beta\,I\,d} = (a+\alpha d-\beta d+\beta d)^{\gamma\,I\,d}\cdot(a+(\alpha-\beta)d) =$$

$$= (a+(\alpha-\beta)d)^{\gamma+\beta\,I\,d}$$ und

$$(a+(\alpha+\gamma-\beta)d)^{\beta\,I\,d}\cdot(a+(\alpha-\beta)d)^{\gamma\,I\,d} = (a+(\alpha-\beta)d)^{\beta+\gamma\,I\,d}$$

was zu erweisen war

Fortsetzung

Die Versuche Lagrange's gelten nur für Gl: 4 Grades nicht mehr für 5ten Grads weil die neue Gl das 10te Grad enthalten würde. die Lagrange Methode ist gut und neue Methode d. Vortheiles (?) im Gebrauche der Analysis.

Eine gewöhnliche Methode in der Analysis ist die neue Unbekannte einführen (?), 2te dieser zu setzen z.B. statt $x = y+z$ so kann ich y gleichgültig annehmen und daß z dazu gefunden wird, man setzt auch $x = y.z$ besonders in der integral Rechnung. Ich kann also für zwei Unbekannten etwas zu meinem Zweck annehmen. Es sei die reducirte cubische Gl (ohne x^2)

1) $x^3 + px + q = 0$

statt $x = y+z$ gibt $(y+z)^3 + p(y+z) + q = 0$ d.h.

$y^3 + z^3 + 3yz(y+z) + p(y+z) + q = 0$ oder

2) $y^3 + z^3 + (3yz + p)(y+z) + q = 0.$ Nun kann ich annehmen, nehmen ich setze 3) $3yz + p = 0$, so wird unsere Gl:

4) $q + y^3 + z^3 = 0$

Ich soll die Werthe von y u z finden die zusammen die Werthe zu x bestimmen ich kann also die Gl 2) in 2 Gl: 3 und 4 verwandeln weil 2 Unbekannten sind. eliminirt man nun so wird

$z = -\frac{1}{3}p$

$q + y^3 - \frac{\frac{y}{3}p^3}{y^3} = 0$

erhalten wir die kubische Gl. zu quadrat

4.) $(y^3)^2 + q\cdot(y^3) - \left(\frac{1}{3}p\right)^3 = 0$

Diese Gl. vom 6ten Grade worin y enthalt. ist ist vom 2ten Gr. worin y^3 enthalten ist.

$$y^3 = -\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \left(\tfrac{1}{3}p\right)^3}$$

5.) $$y = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \left(\tfrac{1}{3}p\right)^3}}$$

5,) Da $z = \dfrac{-\frac{1}{3}p}{y}$ so wird $z = \dfrac{-\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}}}$

$x = y + z$ = also = die Summe der Wurzeln.

Man schafft nun die Wurzeln in dem Nenner weg nach dem Satz $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Man mult. Zähler und Nenner mit der cubisch Wurzel mit ± u. ∓ verwandelt wir und bekommen

$$\frac{-\frac{1}{3}p \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}}}{-\frac{1}{3}p} =$$

6.) $$z = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \left(\tfrac{1}{3}p\right)^3}}$$

Dieses nennt man die Cardanische Formel. Wir wollen ihren Werth untersuchen.

dazu betrachten wir folgendes. die

$\sqrt[3]{a}$ hat 3 verschiedene Werthe

Beweis. $\sqrt[3]{1}$ hat 3 verschiedene Werthe. denn
bezeichnen wir einen der Werthe durch
x so wird $x^3 = 1$. weil jeder Werth von
x der zu cub: erhoben und 1 giebt ist ein
Wurzelwerth. da nun $x^3 = 1 = x^3 - 1 = 0$
das ist eine cubische Gl: und x hat 3 Werthe
der eine Werth ist 1 wie durch Prob: leicht
zu finden ist. also

$$x-1 \mid x^3-1 \mid = x^2+x+1=0$$
$$x = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}-1} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$$ was

zwei verschiedene Werthe giebt
Daraus folgt daß die $\sqrt[3]{a}$ wenigstens 3 versch.
Werthe hat, denn ist einer z so wird

$$z^3 = a$$
$$z^3 - a = 0$$

also z hat 3 Werthe. da $a = a \cdot 1$ so ist
$\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{1}$ also da $\sqrt[3]{1}$ 3 Werthe
hat so hat auch $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{1}$ auch 3 Werthe
dasselbe gilt für jede $m$te Wurzel.
daher zu der Gl 5 hat y 3 Werthe wenn
die $\sqrt[2]{}$ mit + genommen wird und wenn
3 wenn $\sqrt[2]{}$ mit − genommen. also hat y
6 Werthe, welche auch seyn muß

den 5 ist hervorgegangen aus (4, welche
zur 6 Grade ist und y der 6 Werthe hat.
aus dem selben Grunde hat auch z in
6) 6 Werthe. Nun frägt sich $x = y+z$
da nun y 6 verschiedene und z auch 6 verschied.
Werthe hat so geben sie mannigfaltig
6 verschiedene Summen welche x würde
6 Werthe haben da doch x^3 nur 3 Werthe
zuläßt. da es nun nicht gleichgültig ist,
welchen Werth von z man zum Werth von y
zunehmen soll um x zu bekommen, so
folgt daß z+y willkürlich addirt zu fällig
nur gute Resultate geben, und aber
sie zu falschen Resultaten führen. —
Aber da nach 5,) $z = \frac{-\frac{1}{3}p}{y}$ folglich welchen
der 6 Werthe auch y hat $\frac{-\frac{1}{3}p}{y}$ immer einen
richtigen Werth ist für z erhalten, so folgt
daß man die Verwandlung nach Cardani
nicht annehmen kann, sondern die ursprüng-
liche Form übrig bleibt.
Da ich nun auf diese Art für z auch
6 Werthe bekommen kann, so frägt sich
welche Werthe für y ich nehmen
muß um solche für z zu erhalten
daß ich $z+y = x$ bekomme.

S. 147.

da die Werthe von $\sqrt[3]{1}$
die sind 1.
$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$
$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$
so sind die 3 Werthe von $\sqrt[3]{a}$
wenn $a = b^3$ ist
$b \cdot 1$ 1)
$b \cdot (-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3})$ 2)
$b \cdot (-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3})$ 3)

2) in quadr: gibt 3, und in Cubus gibt 1)

¹ dem zu y addirt x gibt

145

Digression zu Ste 91. Facultätenlehre a priori
das Zeigen $a^{2m+1|d}$.

$$a^{2m+1|d} = a^{2m|d}\cdot(a+2md)^{1|d}$$ derselbe $a^{2m|d} = a^{m|2d}\cdot(a+d)^{m|2d}$ folglich

$$a^{2m+1|d} = a^{m|2d}\cdot(a+d)^{m|2d}\cdot(a+2md)^{1|d}$$ da $a^{m|2d}\cdot(a+2md)^{1|2d} = a^{m+1|2d}$

folglich $$a^{2m+1|d} = a^{m+1|2d}\cdot(a+d)^{m|2d}$$

$a^{3m|d} = a^{m|3d}\cdot(a+d)^{m|3d}\cdot(a+2d)^{m|3d}$. denn $a^{3m|d}$ bedeutet doch ob $m+m+m$ factoren giebt von denen jeder um d größer ist. Nehme ich nun den 1. dann den 4, 7, 10, 13 etc nemlich $a.(a+3d)(a+6d)(a+9d)$ u.s.f. davon es m giebt, so bekomme ich $a^{m|3d}$ nehme ich dann den 2, 5, 8, 11 etc nemlich $(a+d)(a+4d)(a+7d)$ etc davon es m giebt so bekomme ich $(a+d)^{m|3d}$ nehme ich endlich den 3, 6, 9, 12 etc nemlich $(a+2d)(a+5d)(a+8d)$ etc davon es m giebt so erhalte ich $(a+2d)^{m|3d}$

Eben so folgt $$a^{4m|d} = a^{m|4d}\cdot(a+d)^{m|4d}\cdot(a+2d)^{m|4d}\cdot(a+3d)^{m|4d}$$

oder $$a^{nm|d} = a^{m|nd}\cdot(a+d)^{m|nd}(a+2d)^{m|nd}\ldots\ldots(a+(n-1)d)^{m|nd}$$

$$a^{3m+1|d} = a^{3m|d}\cdot(a+3md) = a^{m|3d}(a+d)^{m|3d}(a+2d)^{m|3d}\cdot(a+3md) =$$

$$= a^{m+1|3d}\cdot(a+d)^{m|3d}(a+2d)^{m|3d}$$

überhaupt $$a^{nm+1|d} = a^{m+1|nd}\cdot(a+d)^{m|nd}(a+2d)^{m|nd}\ldots\ldots(a+(n-1)d)^{m|nd}$$

$$a^{3m+3|d} = a^{3m|d}\cdot(a+3md)^{3|d} = a^{m|3d}(a+d)^{m|3d}(a+2d)^{m|3d}\cdot(a+3md)(a+d+3md)(a+2d+3md)$$

$$= a^{m+1|3d}(a+d)^{m+1|3d}\cdot(a+2d)^{m+1|3d}$$

 oder allgemein der r. und n [illegible]
ist, wenn $r = n-1$

$$a^{nm+r\,I\,d} = a^{m+1\,I\,nd}\cdot(a+d)^{m+1\,I\,nd}\cdot(a+2d)^{m+1\,I\,nd}\cdots\cdots(a+(n-2)d)\cdot(a+(n-1)d)^{m\,I\,nd}$$

Ist nun im allgemeinern noch zu sein $m = (p-q)$
so ist demnach

$$a^{n(p-q)\,I\,d} = a^{p-q\,I\,nd}\cdot(a+d)^{p-q\,I\,nd}\cdots\cdots(a+(n-1)d)^{p-q\,I\,nd}$$

oder

$$\frac{a^{np\,I\,d}}{(a+(p-q)nd)^{nq\,I\,d}} = \frac{a^{p\,I\,nd}\cdot(a+d)^{p\,I\,nd}\cdots\cdots(a+(n-1)d)^{p\,I\,nd}}{(a+(p-q)nd)^{q\,I\,nd}\cdot(a+d+(p-q)nd)^{q\,I\,nd}\cdots\cdots(a+(n-1)d+(p-q)nd)^{q\,I\,nd}}$$

wo der Zähler dem Zähler der Nenner dem Nenner = ist

endlich ist wiederum $r = n-1$ so ist
$r = (p-q)-1$

$$a^{n(p-q)+r\,I\,d} = a^{p-q+1\,I\,nd}\cdot(a+d)^{p-q+1\,I\,nd}\cdots\cdots(a+(n-2)d)^{p-q+1\,I\,nd}\cdot(a+(n-1)d)^{p-q\,I\,nd}$$

oder

$$a^{n(p-q)\,I\,d}\cdot(a+(p-q)nd)^{r\,I\,d} = a^{p-q\,I\,nd}\cdot(a+(p-q)nd)\cdot(a+d)^{p-q\,I\,nd}\cdot(a+d+(p-q)nd)$$

a $$\cdots\cdots(a+(n-2)d)^{p-q\,I\,nd}\cdot(a+(n-2)d+(p-q)nd)\cdot(a+(n-1)d)^{p-q\,I\,nd}$$

Nun ist der factor $a^{n(p-q)\,I\,d}$ = den factoren $a^{p-q\,I\,nd}\cdot(a+d)^{p-q\,I\,nd}\cdots\cdots(a+(n-2)d)^{p-q\,I\,nd}\cdot(a+(n-1)d)^{p-q\,I\,nd}$

und der factor $(a+(p-q)nd)^{r\,I\,d} = (a+(p-q)nd)(a+(p-q)nd+d)(a+(p-q)nd+2d)\cdots(a+(p-q)nd+(r-1)d)$ weil $n-2 = r-1$ indem $r = n-1$

So ist die Sache ganz allgemein bewiesen die Beweis siehe pag

Wir wollen Werthe finden welche die beyden Gleich: 1) $y^3+z^3+q=0$

2) $3yz+p=0$

zu 0 machen, und wir sehen daß wir jeden Werth von x der Gl. genügen. Ich bekommen 6 Summen für x und nur 3 Werthe ~~werden~~ sind mir nöthig, so müssen 3 dieser 6 Werthe mit den andern Werthen = seyn, was sich aus der Form der Ausdrücke für y und z ergiebt

<u>Dasselbe auch analytischer Weise</u>

Ich suche Werthe die den beyden Gl. genügen. Die Gleich. sind symmetrische Funktionen daraus folgt daß wenn ich y finde so finde ich auch z und bekomme für z dasselbe was für y nämlich $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2+(\frac{1}{3}p)^3}}$ allein wenn ich oben + √ ein Zeichen setze so folgt nicht daß der √ unten für z dasselbe Zeichen zukommt. Vielmehr wir müssen für [illegible] Zeichen in y + √ setzt, welches Zeichen muß der √ in z geben, denn da der z mit y der Gl 1) 2) zu 0 macht und es ergiebt sich daß für z die √ mit − nehmen muß

die 2te Gl: muß Wurzeln der Cub. Gl. bestimmen

Daher kann man Wurzelausdrücke eine für gleich annehmen, weil die Wurzelausdrücke mehrdeutig sind $\sqrt{4}$ ist nicht $= \sqrt{4}$ denn einmal ist es $+2$ andermal -2

Zweite Aufgabe

$u^3 + au^2 + bu + c = 0$ aufzulösen

Aus dieser Gl: bilde ich mir eine neue so daß die Wurzelwerthe der neuen $=$ sind den Werthen der alten $+p$.
Ich setze $u+p = x$ dann da u jeden der 3 Werthe der alt. Gl: ist so ist $u+p = \alpha+p,\ \beta+p,\ \gamma+p$ also drei

Werthe für x der neuen Gl: also u = x − p 149.
d.h. wenn ich statt u, x − p setze bekomme
ich

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - 3px^2 + 3p^2x - p^3 \\ \quad ax^2 - 2apx + ap^2 \\ \qquad px - bp \\ \qquad\quad + c \end{array}\right\} = 0$$

oder $x^3 - 3p$

Für p kann ich setzen was ich will, ich setze also etwas, wodurch der Coeff von x^2 zu 0 wird. also $a - 3p = 0$ also $p = \frac{1}{3}a$
ich setze also statt p $\frac{1}{3}a$ dadurch wird Coef von $x^2 = 0$ also die Gl: wird

$$x^3 + qx + r = 0$$

die nach den obigen Regeln aufgelöset werden kann.

3te Aufgabe

$x^4 + px^2 + qx + r = 0$ aufzulösen

wir könnten auch hier die Cardanische Methode anwenden wo wir statt x, u+y+z setzen würden. Eine andere Methode ist daß wir die function x^4+px^2+qx+r für jeden Werth von x in 2 Factoren zerlegen, und zwar in $(x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 - \alpha x + \gamma)$

150.

(weil x^3 fehlt, so ist zu ersehen daß $x^2-\alpha x$ und $x^2+\alpha x$ multip. sich heben muß also αx^3 muß αx sich aufheben)

ich multiplicire und bekomme

$x^4+(\beta+\gamma-\alpha^2)x^2+\alpha(\gamma-\beta)x+\beta\gamma$ dies muß = sein x^4+px^2+qx+r also muß

1) $\beta+\gamma-\alpha^2=p$ } werden. die Gleichungen
2) $\alpha(\gamma-\beta)=q$ } müssen aufgelöst werden
3) $\beta\gamma=r$, } um Ausdrücke für α,γ,β zu finden.

Aus 1 und 2) wollen wir β und γ finden und die Werthe in 3) einsetzen:

$\gamma-\beta=\frac{q}{a}$ also da ich Sum und Diff der unbekannten habe ist
$\beta+\gamma=p+a^2$

$\gamma=\frac{1}{2}\left(a^2+p+\frac{q}{a}\right)$ } substituirt in 3
$\beta=\frac{1}{2}\left(a^2+p-\frac{q}{a}\right)$ } giebt

4) $\alpha^4+2p\alpha^2+p^2-\frac{q^2}{a^2}=4r$

denn $\left[(a^2+p)+\frac{q}{a}\right]\left[(a^2+p)-\frac{q}{a}\right]$ = genommen

4) verwandelt sich in

5) $\alpha^6+2p\alpha^4+(p^2-4r)\alpha^2-q^2=0$ ist $a^6=(a^2)^3$ ...

abhängende α hat seine 6. Werthe und ich bekomme

gen für γ und für β 6 Werthe; so fanden 159
wir 6 mal einen factoren die mit
einander multipl: immer die funct zu x geben
(weil 2te Classe der Combin: mit Wiederhol
nach 4 Elem: ergibt 6.) was wir nachher nützen
mußten und die Rechnung der Art anstellen
Man sucht nun die Werthe für x die
den ersten factor also des Grad: also die
funct zu x zu 0 machen, und aus jeden factor
bekommt ich 2 Werthe also zusammen 4 Grade
Die Formeln selbst werden nun aber
weitläuftig besonders wenn die Gl 5)
ausgedrückt w. soll.
Dieselbe Art der Auflös: könnte man auch
ab: Gl. anwenden

4te Aufgabe.

$u^4 + au^3 + bu^2 + cu + d = 0$ aufzulösen

Man setz statt $u = z + p$ also
$z = u - p$ dies substit: in der
Gl: und setz dann den coef von z^3 zu 0
indem ich statt p das nöthige setze
u. s. f. wie früher.
Alle höheren Gleich: kann man nicht auf-
lösen nur unendliche Reihen helfen hier

Numerische Gleichungen

Vieta's Methode hat man andere Methode erfunden nach der Lagrange, und ist vor wenigen Jahren von Bauer [illegible] Lehrer in Potsdam, verändert, im Geiste der neueren Analysis. Er nimmt das als eigene Erfindung an, [illegible] hat er Vieta nicht gelesen. Lagrange's Methode ist schon besser. Am zweckmäßigsten ist die Methode von Euler. — Wenn setzt statt x irgend etwas macht er die Gl zu 0 so ist es richtig, macht es's nicht, so setzt ich [illegible] die Funct: ergebe ein etwas positives -

z. B. $x^3+2x^2-x+\frac{3}{2}=0$

so setz ich statt x 1, so bekomme ich $+3\frac{1}{2}$ setz ich -1 so wird die Gl: immer mehr positiv welche ich setze größer negative damit x^3 so groß wird, daß negatives überwiegt bleibt setz ich -2 wird der Werth positiv und setz ich -3 wird der Werth negativ, so liegt der wahre Werth zwischen -2 und -3 man verengere ich die Grenzen immer mehr z. B. auf $-2{,}2$ und $-2{,}3$, so liegt der Werth dazwischen und ist $= -2{,}2+\alpha$ und ich setze nun α statt dessen Werth, weil α klein ist, die höheren Potenzen von α weg und behalte eine [illegible] Gleichung

und diese bekomme ich statt x gänzlich
genommen Werth — Allgemein
Die ganze function sei $f(x)$ also die Gl:
ist $f(x)=0$ ich soll den Werth finden der
fx zu 0 wird. ist a ein Werth der gänzlich
fx zu 0 macht, so ist x selber noch a nicht
sondern $a+h$ setz ich statt x a
so ist fx nicht 0. setz ich statt x, $(a+h)$
so wird $f(a+h)=0$ und a ist ein angeb:
Zustandswerth, h der fehlende Theil. denn
$f(a+h)$ kann ich die form geben $f(a)+df(a)h+d^2f(a)h^2+\ldots=0$
lasse ich die Glieder weil sie klein sind so
bleibt. $f(a)+df(a)h=0$ also

$$h=-\frac{f(a)}{df(a)}$$ hier ist das d zu

finden. Man kann aus $f(x)$ die funct: $df(x)$
ableiten — Lehrbuch. dieses aber gilt
bloß für ganze Potenzen, für alle Potenz:
giebt die Diff: Rech: Aufschluß.

Die weitern Theorien.

Die Wurzeln haben wir nur in speziellen
Fall betrachtet, und wir den $\sqrt{}$ haben
allgemein ausgedrückt und $\sqrt{a}$ so ausgedrückt
ist a negativ so wird $\sqrt{-a}$ eine neue
form die wir imaginär nennen, weil
eine angezeigte Ausziehung ist. und
die ich verbieten kann. und das imaginär
ist eben so wirklich als das Bruch und neg. zahl.

154. Jede Wurzel aus $-a$ lässt sich auch $\sqrt{-1}$
zu entstehen nämlich. $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}$
so $\sqrt{-a} =$ [illegible] $p + q\sqrt{-1}$ wenn $p = 0$ ist
$q = \sqrt{a}$ also reelle Zahlen.
Es ist nur noch zu machen: daß man auch
neue Oper. nicht anzusehen, um operirend
zu anderen Formen gelangen als zu
der Form $p + q\sqrt{-1}$
Ich untersuche die Operationen, die wir
bisher hatten. In der Arithm. von d. Zweiten
d. h. [illegible] ein Ausdruck für
x ist er aber zusammengesetzt aus
den uns bekannten Verbindungen
oder ist er aufsteigend anderer Art
entstanden, daß müssen wir noch
schon nur reelle und imaginäre Zahlen ver-
binden, fragt sich ob da nicht Ausdrücke
entstehen, die nicht reell sind?
Jede imaginäre Quadratwurzel $\sqrt{-b} = \sqrt{(-1)\cdot b} =$
$= \sqrt{-1}\cdot\sqrt{b} = q\cdot\sqrt{-1}$ weil $\sqrt{b}$ reel also $= q$ ist
x entstanden aus einer quadratischen Gleichung
ist $= p + \sqrt{a}$ ist die $\sqrt{a}$ reel so ist alles reell
ist sie imaginär so läßt sie sich darauf
die Form $q\cdot\sqrt{-1}$ bringen. Also ist durch
Bezeichnung $p + q\sqrt{-1}$ ganz allgemein wo
p und q beliebige reelle Ausdrücke sind,
Verknüpfen wir 2 Ausd: $a + b\sqrt{-1}$ und $c + d\sqrt{-1}$
einzeln nun durch Operationen verwandeln

werden, muss der ihr Ausdrucke multipliziren 153

man nur addir. oder subt. $a \pm c \pm (b \pm d)\sqrt{-1} =$
$\alpha + \beta\sqrt{-1}$ derselben Ausd.

man nur multipl. habe: $ac - bd + (ad+bc)\sqrt{-1} =$
$\alpha + \beta\sqrt{-1}$

(wo angenommen wird daß $\sqrt{-1}$ unter dem = Zeichen stehe

dividirt wird $\dfrac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}$ das soll $= x+y\sqrt{-1}$ seyn

also muß $a+b\sqrt{-1} = (x+y\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1}) =$
$= (cx-dy) + (dx+cy)\sqrt{-1}$

ich versuche ob es möglich ist $cx-dy=a$
und $dx+cy=b$ zu machen

denn werden die Ausdr. identisch. aus diesen
möglichen Gl. lassen sich aber solche reelle
finden für x und y so daß die Gleichung identisch
wird. Das ist die Methode der unbest. Coeffic.: d.h.
die Ausdrucke sind nur der form nach be-
kannt oder nicht. ist die form bekannt
dann braucht es nur die Werthe der einzel
Theile aus denen die form besteht.
Ich habe nun die form nicht erwiesen und deshalb
die form als bekannt angenommen.
Weiß ich die form nicht, dann findet die
Methode nicht statt.

156.

Wenn ich überzeugt bin daß $p+q\sqrt{-1} = p_1+q_1\sqrt{-1}$ wo $p\,q$, p_1 und q_1 reell sind, ist die Frage ob die einzelnen Theile identisch sind. d.h.

$$p = p_1$$
$$q = q_1$$

Denn wären dies nicht so würde aus obiger Gleichung ergeben $(p-p_1) = (q_1-q)\sqrt{-1}$ da nun q_1 nicht $= q$ ist so ist es nicht 0, welches heißt ob sich dividieren $\frac{p-p_1}{q-q_1} = \sqrt{-1}$ welche eine reelle Zahl einer imag. = wäre nicht sein kann das dies gilt wenn man p, q, p_1 und q_1 reell sind ob gilt nicht wenn man die [illegible] ...

Ebenso läßt $\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}$ kann ich ~~[illegible]~~ rational machen weil dann $(p+q)(p-q) = p^2+q^2$

welche $\frac{(a+b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}{(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})} = \frac{(a+b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}{c^2+d^2} =$

$$\frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)\sqrt{-1}}{c^2+d^2} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

Beim Potenzieren ist wie bei Multiplication [illegible] nur $\sqrt{\ }$ auch [illegible] aus der [illegible] [illegible]. Ich untersuche ob ob

$\sqrt{a+b\sqrt{-1}} = x+y\sqrt{-1}$ giebt d.h. ob

$a+b\sqrt{-1} = (x+y\sqrt{-1})^2 = (x^2-y^2) + 2yx\sqrt{-1}$

15

also $x^2-y^2=a$
$2xy=b$
der vorstehende Satz beweist daß die [illegible] = sind und daß also nicht
einen andern Weg, die Gl. iden-
tisch machen kann.
Nun versucht man die Gl. aufzulösen
ob sei $x+y=2s$
$x-y=2d$ also $x^2-y^2=4ds=a$

$x=s+d$
$y=s-d$ also $2(s^2-d^2)=b$

damit ist nichts gewonnen anders

$y=\frac{b}{2x}$ die Ausgangsgleichung ist $x^4-ax^2-\frac{1}{4}b^2=0$

$$x^2=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}(a^2+b^2)}$$

$$x=\sqrt{\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}(a^2+b^2)}}$$

nehme ich das − Zeichen in der 2ten Wurzel

nehme die reellen Werthe und mache die
Gl. identisch.

158. Nehme ich den imaginären Werth so bekomme ich statt x einen imaginären dargestellt durch $y\sqrt{-1}$ wo y auch imaginär oder mit $\sqrt{-1}$ mult. und reel dargestellt wird als x wird.

Also folgt die Allg. Gesetz daß die Verbindungen der arithmet. Operationen wenn ich die Auflösung der höhern Gl. mit zulasse, so bekomme ich für jeden Werth von x die form $p+q\sqrt{-1}$

Lagrange [illegible]

Der Ausd. der $p+q\sqrt{-1}$ enthält alle reelle Ausdr. sobald ich q = 0 setze, und ist q reell so enthält er alle imaginären Ausdrücke, was nun für Ausdrücke dieser Form gelten wird, wird allgemein gelten, d.h. für alle speciellen formen, die wir bis jetzt hatten.

$x^m = 1$ für x kann ich m verschiedene Ausdrücke der form $p+q\sqrt{-1}$ finden die alle die Eigenschaft haben daß sie mit m potenz 1 geben denn

$$x^m + 0\cdot x^{m-1} + 0\cdot x^{m-2} \dots + 0x^2 + 0x - 1 = 0$$

daher ist a eine absol. Zahl so giebt es m Werthe so daß $y^m = a$ ist. nehme ich einen der m Werthe von y und multipl. ihn mit einem der Werthe die das x hat, so bekomme

ist im vorigen producte und auch [?] 159
die m Werthe von y. z.B.

$$(y_1 x_4)^m = y_1^m x_4^m = a.1 = a$$

So muss man a als m absolute Zahlen
für $\sqrt[m]{a}$ m Werthe haben, also mdeutig
und hier ist die Vorsicht noch größer wie
bei Quadratwurzel, damit man nicht
einen speciellen Werth für den allgemeinen nehme.
Man findet alle Werthe von $\sqrt[m]{a}$ wenn man
einen z.B. a_1 nimmt und ihn
durch alle Werthe $\sqrt[m]{1}$ multiplizirt, also

$$\sqrt[m]{a} = a_1 . \sqrt[m]{1}$$

Aus der Theorie der Gl: können wir
bis auf x^8 alle Werthe finden
so die von x^{10} weil

$$x^{10}-1=0 \text{ ist}$$

$$(x^5+1)(x^5-1)=0$$

auch $x^{11}-1=0$ giebt

$$(x-1)(x^{10}+x^9+x^8 \ldots\ldots + x^2+x-1)=0$$

Wir werden aber durch die Theorie der
Analysis die Werthe finden.

Lehre der Unendlichen Reihen

oder eigentliche Analysis

Verwandeln wir $\frac{3}{7}$ in einen Decimalbruch so bekommen wir eine unendliche Reihe

$\frac{3}{7} = 0,428571428571428 \ldots$ und eine vollgült: Summe ist die nach bestimmtem Gesetz ins unendliche fortläuft. Diese unendliche Reihe giebt einen bestimmt Werth nehmlich $\frac{3}{7}$. Und nur mit solchen Reihen werden wir umgehen. Mit Reihen die [illegible] vollg: nicht solche sind wir [illegible] [illegible] der Reihe

$0,428571428 \ldots =$

$0 + 4\frac{1}{10} + 2\frac{1}{100} + 8\frac{1}{1000} + 5\frac{1}{10000} + \ldots$

oder $0 + 4x + 4x^2 + 8x^3 + 5x^4 + \ldots$

welche ein specieller Fall der Reihe

$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots$

Diese letzte Reihe werden wir betrachten als eine unendliche nach Potenzen von x laufende Reihe. Sind die Coeff A_0 A_1 etc allgemein, so ist die Reihe allg, sind aber die Coeff specielle Werthe reelle oder imag [illegible] $p + q\sqrt{-1}$ ist die Reihe numerisch

In der numer. Reihe ist das x noch unbestimmt also hat die Reihe noch keinen Werth. Ich kann dem x solche Werthe geben, dass der Reihe einen Werth hat, auch solche, dass das ~~x~~ die Reihe keinen Werth hat. Im ersten Fall ist sie convergent im andern divergent. Die gewöhnliche Definition ist dass wenn die Glieder wachsen ist die Reihe divergent, das ist auch beim Wachsen der Glieder, so hat die Reihe keinen Werth. Nehmen die Glieder ab, ob aber die Reihe einen Werth hat oder nicht, das ist eins oder andern

z.B. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ ist abnehmend und doch hat sie keinen Werth also ist nicht convergirend.

Ein großer Fehler ist, wenn man eine Identität zu beweisen schließt dass man im Ausdruck einen Werth hat, also auch aus dem Ausdr. hervorgegangenen Reihe einen Werth hat. (Ob man diese eines kennten auch kennte sein sollte)

Die ersten Oper. der Reihen ist Lehr. Die werden so wie arith. möglich von Algebr. summen.

Division der unend. R.

162. dividiren unend. R. heißt eine unendliche Reihe derselben Form finden die mit Divisor multipl. den Dividenden giebt z. B.

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots}$$ so setze man

die Form ist beiderseits ausgegeben und man sucht nur die Werthe der Coeff: dies nennt man die Meth. der unbestimmten Coeff:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots \text{ ist doch}$$

$$a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 \ldots = b_0\alpha_0 + \left.\begin{matrix} b_0\alpha_1 \\ + b_1\alpha_0 \end{matrix}\right| x + \left.\begin{matrix} b_0\alpha_2 \\ b_1\alpha_1 \\ b_2\alpha_0 \end{matrix}\right| x^2 + \ldots$$

Es muß nun 1) $a_0 = b_0\alpha_0$

2) $a_1 = b_0\alpha_1 + b_1\alpha_0$

3) $a_2 = b_0\alpha_2 + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_0$ u. s. w. weiter

Aus 1) finde ich α_0 dann aus 2) α_1 und 3) α_2

$\alpha_0 = \frac{a_0}{b_0}$ muß man voraus wissen werden dann setzt man in den Reihen $x = 0$ so wird $\frac{a_0}{b_0} = \alpha_0$. Gleichungen [illegible] nun α_0 auf beyden Seiten subtrahirt dann auf beyden Seiten durch x dividiren und bekommen [illegible] 1ten Ausdruck, wonach α_1 wiederholt ist $x = 0$ so würde ich den Werth von α_1 bekommen u. s. f. dieses Verfahren heißt Differenziren

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \ldots} = \alpha_0 + \alpha_1 x \ldots$$

der Coeff b_0 kann zweierlei Werthe haben
entweder auch $=0$ sein denn würde ~~b_0~~ $\alpha_0 =$
∞ so zeigt sich daß $\alpha_1 = \infty$, $\alpha_2 = \infty$ u.s.f.
nach gewöhnlichem Unsinn, was etwas absurdes
ist. denn sonst würde die Summe der Glieder
unendlich sein.
Es muß also der Reihe nach gelten
Ersten für $b_0 = 0$ ist aber $b_0 = 0$ so
ist in Gl. ~~A~~ $a_0 = b_0 \alpha_0$ ~~#~~ $b_0 \alpha_0 = 0$
also muß auch $a_0 = 0$ sein denn wäre
dieses nicht $=0$ so ist die Voraussetzung
daß ein Quotient existirt von der Form
nicht. Folglich ergiebt sich daß
wenn $b_0 = 0$ ist und a_0 nicht $=0$ ist
so existirt keine Reihe von der Form

ist $b_0 = 0$ so wird $\dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots} =$

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots}{b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \ldots} = \frac{1}{x}\,\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots}{b_1 + b_2 x^1 + b_3 x^2 + \ldots}$$

also gilt der Quotient von der Form
der Entwickl. fähig wenn man ihn
mit $\frac{1}{x}$ multipl:

Numerische Reihen

Ueber Convergenz der Reihen [illegible] Reihe [illegible] in einer Auflage [illegible] Reihe aufgestellt die Reihe $p + px + px^2 + \ldots\ldots - px^{n-1}$ hat n Glieder. Eine solche Reihe heißt geomet. Progression und ist = $p(1 + x + x^2 \ldots + x^{n-1})$ will ich die Summe der n Glieder finden so finde ich den Klammer und mult. mit p. Ich setze $S = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots x^{n-1}$

$$Sx = x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots\ldots x^{n-1} + x^n$$

$$S - Sx = 1 - x^n$$

$S = \frac{1-x^n}{1-x}$ $pS = p\frac{1-x^n}{1-x}$ = der Summe der Progr.

Die Numerische Reihe $1 + 1.x + 1.x^2 + 1x^3 \ldots\ldots$ ist gegeben nun zu erkennen ob sie convergent ist. Wenn ich die n ersten Glieder summire und ihre Summe, wie groß auch n ist, nicht unendlich wird so ist die Reihe convergent, hat also einen Werth. Die Summe wird eine function von n.

Die Summe der n Glieder der num. Reihe ist $\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$ ist nun $x > 1$ so hat x^n keinen Werth denn je größer n ist desto größer wird x^n also unendlich ist $x < 1$ dann ist $x^2 < x$, $x^3 < x^2$ u. s. f. so daß sich x^n immer der 0 und unendlich

näher zu größer ist dass n nehmen. d. h. 165
Für n unendlich wird x^n 0 weil x ein
Randbruch ist, je mehr ich mir Glieder
denke desto mehr wird die Summe
$= \frac{1}{1-x}$ weil dann $\frac{x^n}{1-x}$ immer mehr dem 0
= wird. ist $x=1$ dann kann ich nicht
sprengen weil $1-1=0$ und durch 0 darf
ich nicht dividiren. Ist $x=1$ so bekomme
ich $1+1+1+1$ unendl. fort, welches
divergirend ist, also ohne Werth.
daher nur die Reihen Werth haben ~~wenn~~ $x<1$
Multipl. die num. Reihe durch p so
wird $p(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots\ldots)$
p mag reell oder imaginär sein von
der Form $p+q\sqrt{-1}$ daher auch die Reihe
$p+px+px^2+\ldots\ldots$ mit unendliche einen
Werth wenn $x<1$ kann man $x \geqq 1$
die Reihe $A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots\ldots$
wo A_0 A_1 etc von der Form $p+q\sqrt{-1}$ sind
hat einen Werth wenn $x<1$ wenn man
unter allen Coeff. unter allen mit unendl.
einer der größte ist. d.h. man die Coeff
abnehmen, also der erste der größte ist.
Dann ist der nun der größte Coeff A_μ so
schreibe ich die Reihe

166 $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots$
die Reihe hat einen Werth wenn $x < 1$

Ob die Reihe $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots$ ist nicht
allemal divergirt wenn $x \geqq 1$
entgegengesetzt, und ob ist das entgegen-
gesetzte Fall möglich, wenn die Coeff.
[…] angenommen werden.
Dieses Kennzeichen genügt noch nicht
ich möchte Kennzeichen haben, die Reihe
convergirt, ich mag setzen für x was
ich will. Es sei z. B.

$1 + yz + y^2z^2 + y^3z^3 + \ldots\ldots$, die
Reihe hat einen Werth wenn $yz < 1$
es kann auch z so groß sein wie es
will man nur $y < \frac{1}{z}$
Dividirt man in der Reihe $1 + x + x^2 \ldots$
das eine Glied durch das vorhergehende
so erhält man immer x, so ist der Schluß
daß die einzelnen Coefficienten $<$ als 1
bleibt der quotient eben so groß
oder immer kleiner je größer ich das
n nehme, so ist die Reihe convergirend
Dieses Kennzeichen ist das allg. doch
ich kann n^{ten} Coef. nehmen es durch $n-1^{ten}$ Co-
dividire, sehe ob der quotient < 1

und untersuche ob ~~[illegible]~~ er allemal 167.
nach kleiner wird, je größer
ich das n nehme. Und für die Werthe von x für
welche das wird ist die Reihe converg:
das n^{te} Glied zu finden setzen den
Exponenten der $n-1^{te}$ angiebt sich
man ~~[illegible]~~ statt n in dem n^{ten} Glied
$n-1$ setzen —
Durch die Glieder abnehmen, dies als Zeichen
der Convergenz zu nehmen, ist sehr gefährlich
und täuschend. —
das Gesetz braucht nicht vom 1ten Gliede an
zu gelten. Ist die Beschaffenheit der
2000 ersten Glieder so, daß das Folgende
das vorhergehenden zehnfache ist,
und erst vom 2000ten Gliede davon
Gesetz eintritt, so besteht meine
Reihe aus 2 Theilen, der erste Theil
ist durch sich bestimmt, der 2te ist durch
das Gesetz bestimmt also die ganze
Reihe hat einen Werth
Wir wollen nun auch Kriterien die
Convergenz untersuchen.
Es sei z. B.:

168. $1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots S\left[\frac{1}{n!}x^n\right]$

Wir nehmen das n^{te} Glied der Reihe und dividiren es durch das $(n-1)^{te}$. das n^{te} Gl. sei $\frac{1}{n!}x^n$ vorausgesetzt daß das Glied sei das $n+1^{te}$ Gl. weil das 1te Glied 1 ist. das $(n-1)^{te}$ Gl. ist $\frac{1}{n-1!}x^{n-1}$

daher $\dfrac{\frac{1}{n!}x^n}{\frac{1}{n-1!}x^{n-1}} = \dfrac{n-1!\,x^n}{n!\,x^{n-1}} = \dfrac{n-1!}{n!}x = \dfrac{x}{n}$

der Quotient wird desto kleiner je größer wir n nehmen und die Reihe convergirt, für jedes x.

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{2.3}x^3 + \dots$

die Reihe divergirt wenn $x > 1$. Also obschon der Ausdruck ein völlig bestimmter Werth hat, so ist doch die Reihe unendlich groß. Ebenso die Reihe kann nicht convergent sein, sondern wird ihr Werth null, wenn $x > 1$ null, weil nicht sein $\sqrt{1-x}$, wenn $x > 1$ kann.

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ diese Reihe ist auch diverg. wenn $x > 1$.
Also kann ich aus der divergirenden Reihe auch den Ausdruck nicht schließen. die Werthe können nicht identisch sein weil die unendl. Reihe keinen Werth hat. die Ausdrücke sind identisch.

Schubert convergirende Reihen von der Art ~~ebenso ?~~ Cf. Schub. Beispiele aus dem Gebiete der höhern Mathem. erläutert: in den Memoires der Petersburger Academie.

Hat man eine Reihe

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

wo keiner der Coeff. der größte ist d. h. wo die Coeff. nicht selbst ins unendliche wachsen so ist es möglich dem x einen solchen Werth zu geben, daß wenn A_0 noch so klein ist, wenn es nur nicht $=0$, doch das 1te Glied größer als die Summe aller übrigen Glieder und die Summe der übrig: Glieder ~~ist~~ läßt sich x zu verschwinden [illegible] Statt der übrigen Glieder ($A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots$) habe ich den größten Coeff. A_μ raus und denke mir diesen Coeff. statt aller anderen Coeff. so ist die Summe solcher Bestandtheile $x\left(A_\mu \cdot \frac{1}{1-x}\right)$ und diese Summe ist größer als die richtige Summe, ist nun A_0 auch größer als $x\left(A_\mu \frac{1}{1-x}\right)$ so ist der Satz bewiesen d. h. gesetzt $A_0 = A_\mu \cdot \frac{1}{1-x} + p$ und aus der Gleich. läßt sich x finden

170. Ist das 1te Glied ~~so als die Summe aller übrigen Glieder~~ endlich positiv oder negativ so ist es möglich dem h solchen Werth zu geben, daß die Summe der ganzen Reihe positiv oder negativ wird – weil ein Corollarium des vorigen Satzes ist. nehmlich ich gebe dem x solchen Werth, daß das 1te Glied das größte ist

---

Habe ich drei Werthe $F = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + a_3 h^3 + \ldots$

$G = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots$

$H = B_0 + B_1 h + B_2 h^2 + \ldots$

Setze ich voraus daß Werth der Reihe ~~und~~ F zwischen den Werthen der Reihen G u. H liegt und daß die Anfangsglieder jeder Reihe H und G gleich sind d.h. daß $A_0 = B_0$ so ist auch $\alpha_0 = A_0 = B_0$ – denn

---

Da $f > g$ so ist $f-g$ positiv da $f < h$ so ist $f-h$ negativ

1) $f-g = (\alpha_0 - A_0) + (\alpha_1 - A_1)h + \ldots$,

2) $f-h = (\alpha_0 - B_0) + (\alpha_1 - B_1)h + \ldots$

d.h. die 1) ist positive Reihe und 2) ist neg. Reihe. wäre nun $(\alpha_0 - A_0)$ positiv, so könnte man dem h solchen Werth geben daß die ganze Reihe ~~neg~~ positiv würde

da nun $(\alpha_0 - A_0) = (\alpha_0 - B_0)$ so würde also
auch $(\alpha_0 - B_0)$ positiv so gross dass die
ganze Reihe 2) positiv wäre, weil
nichts seyn kann daß sie ist negativ
so kann also $(\alpha_0 - A_0)$ nicht positiv
seyn, wäre $(\alpha_0 - A_0)$ negativ, so
würde die Reihe 1 negativ seyn können
wenn man dann x einen Werth darnach
geben. Da nun $(\alpha_0 - A_0)$ weder
pos. noch neg. seyn kann so muss
es $= 0$ d. h. $\alpha_0 = A_0$ seyn.
Man kann dies auch demonstriren wenn man
beyde Differenzen positiv setzt, denn sind
auch die Reihen positiv die ersten Glieder
positiv, deshalb muss zu anderen Seite negativ ist.
Dieser Satz wird angewendet bei Bestimmung
der Krümmung etc wo man einen Zuwachs bildet a
so ist bfec > bfgc und < decb also ein Mittel
werth.

Wir müssen noch $(a+b)^m$ ist $= S m_b a^{m-b} \cdot b^b$
wenn m absolute ganze Zahl ist. Der Lehrsatz
des ganzen Entwickeln ist des binomium
$(1+b)^x$ unter x ganze absolute Zahl
$(1+b)^x = S(x_b \cdot b^b)$ jetzt ist die Frage ob
der Satz gilt, wenn x eine negative Zahl ist

172 Es sei $(1+b)^y$ wenn $y = -x$

da nun $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ so ist $(1+b)^y = \frac{1}{(1+b)^x}$

$$= \frac{1}{S\left(\overset{x}{b}\cdot b^b\right)} = \frac{1 + 0b + 0b^2 + 0b^3 + \ldots\ldots}{S\left(\overset{x}{b}\cdot b^b\right)}$$

Zähler und Nenner sind also [illegible] Reihen die nach Potenzen y x steigen, bei zu dividiren wendet man die Form der unbestim. Coefficienten, es sei nehmlich $= S\left(C_a b^a\right)$ dann

$$1 = S\left(C_a \cdot b^a\right) . S\left(\overset{x}{b}\cdot b^b\right) = S\left(C_a \overset{x}{b} \cdot b^{a+b}\right)$$

da durch ihr Buchstaben dadurch nichts als die Folge der Zahlen von 0 bis ∞ [illegible]

Wir setzen statt $a+b = r$ so ~~wenn~~ muss

$1 = S\left[C_a \overset{x}{b} \cdot b^r\right]_{a+b=r}$ soll das sein, so muss der Coeff von $b = 0$ sein, wenn r nicht 0 ist, ist r null dann muss der Coeff $= 1$ sein d.h.

$$C_0 \cdot x_0 = 1 \text{ u. } S\left[C_a \overset{x}{b}\right]_{a+b=r} = 0$$

Wir wissen daß $\frac{(x+y)^{m|-1}}{m!} = S\left[\frac{x^{a|-1}}{a!}\cdot\frac{y^{b|-1}}{b!}\right]_{a+b=m}$

173

ist $x+y=0$ so bekommen wir $\frac{0^{m|-1}}{m!}$ oder

$$0 = S\left[X_a \cdot Y_b\right]_{a+b=m}$$ wenn für m jeden werth

ist welche man im ganze positive Zahl ist.

Unsere Aufgabe wenn $(1+b)^y$ wenn $y=-x$ angenommen, und wir erhalten

$$(1+b)^y = \frac{1}{(1+b)^x} = \frac{1}{S\left[X_a b^a\right]}$$

Wollen wir $\frac{1}{S[X_a b^a]} = S\left[C_a x^a\right]$ setzen, wo die Coeff noch unbekannt sind und die finden wenn wir sie bekannt annehmen

$$1 = S\left[X_a b^a\right] \cdot S\left[C_a x^a\right] = S\left[X_a \cdot C_b \cdot b^{a+b}\right]$$ oder

$$= S\left[X_a \cdot C_b \cdot b^r\right]_{a+b=r}$$

daraus ergiebt sich $X_0 \cdot C_0 = 1$ wenn $r=0$ ist.
$C_0 = 1$

Ist r nicht 0, so muss der Coeff von b^r verschwinden 0 sein also

$$S\left[X_a C_b\right]_{a+b=r} = 0$$

diese Gl. ist Repräs. von vielen Gleichungen indem ich statt r verschiedenen Werthe setzen können, ~~und so~~, ist $r=1$ so hat der Ausdruck 2 Glieder nämlich $a=0$ $b=1$ oder
$a=1$ $b=0$

ist $r=2$ dann giebt es 3 Gl: $a=1$ $b=1$
$a=2$ $b=0$
$a=0$ $b=2$
und so fort.

Daher folgt daß $\frac{C}{b} = \frac{y}{b} = \frac{y^{b'}-1}{b'}$

wenn nun $y = -x$ d.h. $x+y=0$

also wird

$(1+b)^y = S[y b^{b}]$ weil der Binom: Lehrsatz gibt, so gilt auch der b. Satz wenn der Expon: negative Zahl ist

da der b: Satz auch für $Exp=0$ gilt, so gilt er für differenz potenzen.

Den bin: Lehrs. für gebrochene Zahl zu beweisen geht nicht, aber um gebrochene Potenzen nach die formeln beweisen.

Oder wir stellen a^x auch wenn x kein rat. ist

Aufgabe

Man soll a^x wenn $x=(a-b)$ soll verwandelt werden in $A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots$

man muß aber erst zeigen, ob solche Reihe und a^x gleich entwickeln möglich ist. Wenn sonst ist solches unmöglich, so wird man bei Bestimmung der Coeff. auf Widersprüche kommen. Und oben in Aufsätzen der höhern Analysis zeigten daß solche Reihe muß existiren wenn auch die Coeff. sich ohne Widersprüche finden lassen. Daher ist zu beweisen daß die Annahme ... ist, für ...

Ausdruck [illegible] die [illegible] Reihe 175.
[illegible] ist $a^x = (1+b)^x$ wenn $a-1=b$

$(1+b)^x = S\left[\frac{x^{r|-1}}{r!} b^r\right]$ nach bin. Lehrs.

$x^{r|-1} = x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots(x-(r-1)) =$

~~$= \overset{r-b}{C}{}^{b}\,x$~~

~~dann~~ $S\left((-1)^b \overset{b}{C}_{1.2.3\ldots r-1} . x^{r-1-b}\right)$ nach der Comb. form

also $a^x = S\left[\frac{b^r}{r!}(-1)^b \, \overset{b}{C} . x^{\cancel{r-b}}_{r=b+1}\right]$ eine Reihe die nach steigenden Potenzen fortlaufend

der Coeff von x^1 ist nicht bestimmbar [illegible] [illegible] Reihe.
[illegible] [illegible] [illegible] der Quotient [illegible] wird $=1$ daher muss $b = r-1$

nur $S\left[\frac{b^r}{r!}(-1)^{r-1} . \overset{r-1}{C}\right]$

der $\overset{r-1}{C} = 1.2.3\ldots(r-1) = r-1!$

daher der $\frac{(r-1)!}{r!} = r$ so wird der

Coeff für $S\left[\frac{b^r}{r}(-1)^{r-1}\right]$ wo r nicht 0 sein kann und wir setzen $r+1$ so bekommen

wir $S\left[-1^r . \frac{b^{r+1}}{r+1}\right]$ wo nun r auch 0 sein kann, wo $b = r-1$ das wird [illegible]

Logarithm sein von $(1+b)$

die Form für a^x ist unbequem, weil die Combin: Klassen nicht gerade leicht gefunden werden und man kann a^x nach Potenzen von x leicht so entwickeln

man nimmt an $a^x = S\left[\frac{P}{\alpha}\cdot x^\alpha\right]$ die Coefficienten enthalten [illegible] x nicht. da nun die beyden Ausdrücke identisch werden ich mag für x setzen was ich will so wird $a^y = S\left[\frac{P}{\alpha}\cdot y^\alpha\right]$ wenn der Coeff. [illegible] enthält. ebenso $a^{x+y} = S\left[\frac{P}{\alpha}(x+y)^\alpha\right]$

da nun $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ so ist auch

$$S\left[\frac{P}{\alpha}\cdot x^\alpha\right] S\left[\frac{P}{\alpha} y^\alpha\right] = S\left[\frac{P}{\alpha}(x+y)^\alpha\right]$$

$$= S\left[\frac{P}{\alpha}\frac{P}{b}\cdot x^\alpha \cdot y^b\right]$$

da nun $(x+y)^r = \frac{r!}{\alpha!\,b!}\, x^\alpha \cdot y^b$ so wird
$\alpha + b = r$

$$S\left[\frac{P}{\alpha}\frac{P}{b}\cdot x^\alpha y^b\right] = S\left[\frac{P}{r}\cdot\frac{r!}{\alpha!\,b!}\, x^\alpha y^b\right]$$
$\alpha + b = r$

es muss daher

$$\frac{P}{m}\cdot\frac{P}{n} = \frac{P}{m+n}\cdot\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

$$P_m \cdot P_1 = P_{m+1}\cdot(m+1)$$

daraus kann ich alle Coeff. finden außer den von P_1 diesen hab ich oben schon gefunden.

Setze ich in der letzten Gl. $m=1$ [illegible] bekommen ich

$P_1 \cdot P_1 = 2 \cdot P_2$
$P_2 \cdot P_1 = 3 P_3$
$P_3 \cdot P_1 = 4 P_4$
$\vdots \qquad \vdots$
$P_{m-1} \cdot P_1 = m P_m$

} multiplizirt und weg dividirt

$(P_1)^m = m!\, P_m$ oder $P_m = \dfrac{P_1^m}{m!}$

A) also $a^x = S\left[P_1^r \cdot \dfrac{x^r}{r!}\right]$ wo $P_1 = S\left((-1)^r \cdot \dfrac{(a-1)^{r+1}}{r+1}\right)$

angefangen $r = 0$ so wird

$a^x = 1 + P_1 \cdot \dfrac{x}{1} + P_1^2 \cdot \dfrac{x^2}{2!} + P_1^3 \cdot \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$

$P_1 = \dfrac{a-1}{1} - \dfrac{1}{2}(a-1)^2 + \dfrac{1}{3}(a-1)^3 - \dfrac{1}{4}(a-1)^4 - \ldots$

a mag nun bedeuten, was es will, man nehme x beliebig an, ist nun $x = 1$ so bekommt man

I $a = S\left(\dfrac{P_1^r}{r!}\right)$ eine Gleichung zwischen a und P_1

und in II) $P_1 = S\left((-1)^r \dfrac{(a-1)^{r+1}}{r+1}\right)$ ist auch eine solche

wo die erste gegeben ist a zu finden wenn P_1 gegeben ist, die 2te P_1 zu finden wenn a gegeben ist. Es frägt sich ob man ist statt P_1 einen Werth in I) setze, der diese Gl. identisch macht, ob derselbe Werth in Gl. A) gesetzt die Gl. A) identisch macht.

178 denn I) $a = S\left[\frac{P_1^n}{n!}\right] = 1 + \frac{P_1}{1} + \frac{P_1^2}{2!} + \frac{P_1^3}{3!} + \dots$

so hat P_1 m verschiedene Werthe von denen jeder die Gl: [illegible], da nun m unendlich ist, so müßte es unendlich viele Werthe geben und es fragt sich ob jeder der Werthe der Gl. A) entspricht.

$$A) \quad a^x = S\left[P_1^n \cdot \frac{x^n}{n!}\right]$$

Wenn bewiesen ist daß man wenn eine Reihe [illegible]

$S\left[\frac{Q^n}{n!}\right]$ und diese zur x erhebt [illegible] wird

$$\left(S\left[\frac{Q^n}{n!}\right]\right)^x = S\left[\frac{(Qx)^n}{n!}\right]$$

den Beweis [illegible] Erhebung. denkt man sich in Q nun der Werthe [illegible] von P_1 aus der Gleichung I) so wird $S\left(\frac{Q^n}{n!}\right)^x = a^x = S\left[\frac{P_1^n \cdot x^n}{n!}\right]$

also gehört jeder Werth der Reihe I von P_1 der Reihe in A)

daher kann die Reihe $S\left[P_1^n \cdot \frac{x^n}{n!}\right]$ immer mit a^x gleichgenommen werden, x mag bedeuten was es will.

Man muß noch untersuchen, daß die [illegible] vielen Reihen von A) wenn ich in P_1 die Werthe des P_1 in I) setze, alle einander = sind so lange x eine [illegible] ganze Zahl ist. sind [illegible] [illegible] gleich wenn ich statt x den Bruch $\frac{6}{8}$ $\frac{3}{4}$ in kleinsten Zahlen setze (das heißt $\frac{6}{8}$ und $\frac{3}{4}$) und die Verschiedenheit ergibt (als 4 also dass

179.

Werthe giebt es 4. und den Vortheil zu finden aus der 4 Wurzel. Setzt ich statt x eine Ziffer . den unendlich viele und partheien welche gleich, aber unendlich viel Partien sich bilden. ist x imaginär $= p+q\sqrt{-1}$ so sind alle unendlichen Reihen von einander verschieden. So hat a^x einen Werth [ü: Werthe] hat man x eine ganze Zahl ist, m (Nenner) Werthe $x = \frac{n}{m}$ in kleinsten Zahlen, unendlich viel Werthe wenn $x =$ einer irrationalen Zahl, auch unendlich viel Werthe wenn $x =$ imaginär

A de infinitis novis logarithmorum generibus ... Phil. Program zu Thorn von Ohm wurde nicht verstanden. Dieser Ohm einen seiner Zeit [illegible] Weg in sein Lehrbuch einging

P_1 heißt Modul zur Basis a.

Aus der Gl. I ist P_1 schwer zu finden. Also nimmt man einen Werth von P_1 an, und suchen den Werth von a dazu vorläufig $P_1 = 1$ und vernünftigerweise wollen:

$a = S\left(\frac{1}{r!}\right) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 2,718\ldots = e$

d. h. $e = S\left(\frac{1}{r!}\right)$

Setzt man in A) statt $a = e$ [so wird unter unendlich vielen Werthen] statt $P_1 = 1$ so wird $e^x = S\left(\frac{x^r}{r!}\right)$ eine gute Gleichung wenn x differenz gegen zerfallen (denn das obige war oder alle Unterschiede kommen) und man denkt uns künftig unter e^x die Reihe $S\frac{x^r}{r!}$ das ist die natürliche Potenz, wo der Dignand eine numerische Zahl x ganz allg. ist. die natürliche Potenz hat nur 1. Werth ist also nur eindeutig.

[illegible]

180 Gelten nun die formel die [illegible] worden [illegible]?

Also zu untersuchen ob $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ [illegible]

wenn die Reihen gelten

$$S\left(\frac{(x+y)^r}{r!}\right) = S\left(\frac{x^a}{a!}\right)\cdot S\left(\frac{y^b}{b!}\right)$$ oder vereinfacht:

$$S\left(\frac{r!}{1\cdot a!\,b!}\,x^a\cdot y^b\right)_{a+b=r} = \text{———} \quad \text{oder}$$

$$S\left(\frac{x^a\cdot y^b}{a!\,b!}\right) = S\left(\frac{x^a\cdot y^b}{a!\,b!}\right)$$ wo die Bed: $a+b=r$ nicht nöthig ist weil r nicht mehr da ist.

Die 2te formel $e^x : e^y = e^{x-y}$ denn $e^{x-y}\cdot e^y = e^x$ nach formel I unmittelbar.

Die formel $a^m \cdot b^m = (ab)^m$ und $a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ können hier nicht vorkommen weil die Exponenten = sind bei natürlichen [illegible].

Die formel $(e^x)^y = e^{xy}$ gilt nur [illegible] wenn y eine ganze Zahl ist. Ist [illegible] so ist $(e^x)^2 = e^x \cdot e^x = e^{2x}$ u. s. f.

und für negative $(e^x)^{-2} = (e^x)^{-1\cdot(2)} = e^x$

Es ist nur frage ob $\frac{1}{e^v} = e^{-v}$ und das ist denn $e^v \cdot e^{-v} = e^0 = 1$ nach form. 1 unmittelbar

Vorgelegte also formeln die leichter mit [illegible].

Trigonometrische Functionen 181.

bilden die eigentliche analytische Trigonometrie, der hier ebenen Polyg. [illegible] wegen die ebene u. sphärische Trig. nur Anwendung ist.

1) $e^{x} = S\left[\frac{x^{n}}{n!}\right] = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \ldots\ldots$

Wir können die Glieder der Reihe in zwei [illegible] denken. Wir wollen betrachten die Reihe aller geraden Glieder d. h. die gerade Potenzen v. x enthalten.

Wir setzen $x = -x$ so wird

2) $e^{-x} = S\left[\frac{(-x)^{n}}{n!}\right] = S\left[\frac{(-1)^{n} \cdot x^{n}}{n!}\right]$ hier wechselt + und − in den Gliedern; addiren wir die Reihen 1 und 2 bekommen nur die geraden Glieder, die durch Subtraction wegfallen.

Satz. In einem Agregat kann ich statt x setzen $2n$ oder $2n+1$ so bekommen wir gerade oder ungerade Glieder

S. Lehrbuch und also

$e^{x} = S\left[\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$ Glieder die gerade Potenz von x enth.

$e^{x} = S\left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$ ——— ungerade ———

$e^{-x} = S\left[\frac{(-1)^{n} \cdot x^{n}}{(n)!}\right] = S\left[\frac{x^{2n}}{2n!}\right] - S\left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$

endlich wenn ich nun $\frac{e^x+e^{-x}}{2} = S\left[\frac{x^{2r}}{(2r)!}\right]$
subtrahirt und die Reihe $\frac{e^x-e^{-x}}{2} = S\left[\frac{x^{2r+1}}{2r+1}\right]$
das erste enthält gerade, das zweite die ungeraden Glieder

Wir wollten die Reihe der geraden Potenzen aber mit abwechselnden Zeichen, so setzt man statt $x = x\cdot\sqrt{-1}$ oder xy wenn $y=\sqrt{-1}$ und bekommen

$$\frac{e^{xy}+e^{-xy}}{2} = S\left[x\right.$$

da $y^{2r} = (y^2)^r = (-1)^r$

und $\frac{e^{xy}+e^{-xy}}{2} = S\left[\frac{(-1)^r \cdot x^{2r}}{2r!}\right]$. diese Reihe wird oft gebraucht in Anwendungen und ich bezeichne sie durch $\cos x$

ferner $\frac{e^{xy}-e^{-xy}}{2y} = S\left[(-1)^r \cdot \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}\right]$

diese Reihe der ungeraden Gl. mit abwechselnden Zeichen, die Reihe bezeichnen wir durch $\sin x$ so das Letztere hinkommt

183

Nun giebt $(\sin^2 + \cos^2) = \left(\frac{e^{xy} + e^{-xy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{xy} - e^{-xy}}{2y}\right)^2 = 1$

So ist 1) $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$.
ferner 2) $\sin(-y) = -\sin y$ 3) $\cos -y = \cos y$ 4) $\sin 0 = 0$
5) $\cos 0 = 1$. Aus 1 und 3 und 4 ergiebt sich 5) daß
$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$
6) $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

Ich frage nun ich eine unter der unendl. Reihe denke und statt x Werthe gebe von 0 bis ins unendliche wachsend sehe ob die Werthe der Reihe auch so wächst oder nicht. Jeder siehet daß dies den Gang der Function gewöhnlich! Wir wird der Gang jeder Function gefunden — Ich setze nun statt x irgend einen Werth jetzt auch x selbst, dann allerwenigstens Werth wenn ich x+h wo h ein Mal das Verschwindende gedacht werden muß. (Die Richtigkeit läßt sich doch jetzt nicht erkennen) wir untersuchen also sin x und sin x+h desselben — gilt von jeder Function fx im Kurzen: wie der Gang der Function geht Ich gebe der Funct fx statt $f(x+h)$ und untersuche ob eine ~~volle~~ unendl. Reihe nach Potenzen von h sich bilden läßt, ist es, so stell ich die Verwandlung an. Aus welchem Grund muß fx seine den setz ich statt $h=0$ so wird $fx = fx$ ich bekomme $f(x+h) = fx + f_1 x h + f_2 x h^2 + \ldots$
wir bekamen also $f(x+h) - fx = f_1 x . h + f_2 x h^2 + \ldots$!
Es hängt also vom ersten Coeff ab wie die Reihe ist, ist der Coeff pos. so ist die Reihe pos. und ebenso von negativen, für welche Werthe von x f_1 positiv oder negativ wir

ist eine andere Frage. durch sie erhält man = d
und weil es Differential [oder Ableitung] sind zu unterscheid
den Differentialquotienten auch wissenschaftl. [illegible]
Nun ist $\sin(x+h) = \sin x + \cos x \cdot h - \sin x \cdot \frac{h^2}{2!} + \ldots$
oder $\sin(x+h) - \sin x = \cos x\, h - \sin x \frac{h^2}{2!} + \ldots$
also ist die Reihe zu bringen [illegible]
zu bringen
Nun ist $\cos(x+h) - \cos x = -\sin x \cdot h - \ldots$
der Diff ist somit nur $\sin x$

und hier zeigt sich das [illegible] der Funct [illegible]
[illegible] man statt x [illegible] $\Theta + h$
[illegible] und [illegible] zu [illegible].
Es ergibt also [illegible] den ich
$\frac{1}{2}\pi$ [illegible] wo der [illegible] Sin
$= 1$ der Cos $= 0$ ist.

Nun zeig ich daß alle Zahlen von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ im 1ten Quadranten liegen. Ich untersuche nun den Sin: und Cos: die zu π gehören, und dann die die zu $\pi - x$ gehören 18

$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ daher

$\sin \pi x = 2 \sin \frac{1}{2}\pi \cdot \cos \frac{1}{2}\pi = 2.1.0 = 0 = \sin \pi$

Eben so ist $\cos \pi = -1$. So fand ich die Eigenschaft der Zahl π. und nun alle Zahlen die man statt x setzt, die größer sind als $\frac{1}{2}\pi$ bis π im 2 Quadrant liegen. Es sei z eine Zahl die im 1. Quadr. liegt so ist $\pi - z$ eine Zahl im 2. Quadr.

$\sin(\pi - z) = \sin z$, da nun $\pi - z$ alle Zahlen vorstellt die im 2. Quadr. liegt, so wachsen die Sinus von 0 bis 1 und nehmen ab von 1 bis zu 0. Nun ist nach obigen Formel

$\cos(\pi - z) = (-1.) \cos z = -\cos z$ was nothwendig negative Zahl giebt. So ich weitere Untersuchungen im 3t 4t 5t u. Quadranten d. i. Zahlen die zwischen π und $\frac{3}{2}\pi$, zwischen $\frac{3}{2}\pi - 2\pi$ u. s. f. liegen. Ist z Zahl des 1. Quadr: so ist $\pi + z$ eine Zahl des 3ten Quadr: $\pi - z$ deutet eine Zahl des 2ten Quadranten so ist $2\pi - z$ Zahl des 4ten Quadr. u. s. f. Die Zahl π die ich zuerst fand, theile ich in 180 Theile, und nenne $\frac{\pi}{180}$ einen Grad (°) $\frac{°}{60}$ nenne ich Minute (') $\frac{'}{60}$ nenne ich Secunde ('') u. s. f.

186 Dies hat auch die Anwendung des praktischen zum Vortheile: den Vorzug der trig: Linien in der Analysis vorzustellen ohne zu [illegible]. —

Wir wissen 1) $\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2} = S\left[(-1)^r \frac{x^{2r}}{(2r!)}\right] = \cos x$

2) $\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i} = S\left[(-1)^r \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}\right] = \sin x$

die 1 Gl ist $\frac{u+v}{2} = \cos x$

die 2 Gl ist $\frac{u-v}{2i} = \sin x$

daraus ergiebt sich $e^{xi} = \cos x + i \sin x$

und setzt man statt $x = -x$ so wird $e^{-xi} = \cos x - i \sin x$

darnach können wir jede Potenz in eine Summe auflösen: z. B. $e^{mxi} = \cos mx + i \sin mx$ [

[weil $e^{xi} = e^{mxi}$ so oft m eine ganze Zahl ist.

Aus der Theorie der natürl. Potenzen ist $e^{mxi} = (e^{xi})^m$

wenn m eine ganze Zahl ist und substituirt so wird $(\cos x + i \sin x)^m = \cos mx + i \sin mx$

Theorie der natürl. Logarithmen

$\log z$ = jeden Ausdruck x, der die Eigenschaft hat, daß $e^x = z$ wird. – da $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots = z$

diese Gl. müßte ich nun nach x auflösen

die Gl: würde 0 geben wenn $(-z+1)+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\dots=0$ 187

Soll man den Log von z finden, so soll man x aus der Gl: finden. ich habe Vermuthung, daß es unendlich viele Werthe für x giebt, weil die Gl. vom unendlichen Grade ist. Aus Th. der h. Gl: ist bekannt daß sobald die Coeff der x reell sind, noch fehr ist, können alle reell sein, oder von der Form $p+q\sqrt{-1}$, wo p und q reell sind. Mag nun z reell sein oder imag von Form $p+q\sqrt{-1}$ so gilt dasselbe den Aufgaben wird. man soll alle Werthe für x finden der Form $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ die die Eig. haben daß sie in Gl: substituirt, die Gl: identisch wird. Man soll finden die Log von $(p+qi)$ wo $i=$ $=(\sqrt{-1})$, wo wenn $q=0$ ist p allein reelle Werthe vorstellt. der Werth von x soll sein $\alpha+\beta i$, wo α und β reell sind und noch unbekannt d.h. so daß $\log(p+qi)=\alpha+\beta i$ oder $p+qi=e^{\alpha+\beta i}$

der Kunst ist die Potenz in letzten Form zu verwandeln was möglich ist, weil Identität der Gl: das wesentliche der Gl: ist.

$e^{\alpha+\beta i}=e^{\alpha}\cdot e^{\beta i}$, da $e^{xi}=\cos x+i\sin x$ so bekomme ich $p+qi=e^{\alpha}(\cos\beta+i\sin\beta)$ und mein Zweck ist erreicht Wenn $m+i=n+i$ so ist $m=n$, $i=i$ also sei

$p=e^{\alpha}\cos\beta$ und $q=e^{\alpha}\sin\beta$ die beyden Gl. müssen ich auflö. ich eliminire durch p dann wird die Gl: transcendent, nehme ich aber als neue Unb: sin als andern Unb: cos β so werden die Gl: algebraisch.

188. man quadrirt beyde Gl. und addirt weil $\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$.
ich erhalte also $p^2+q^2=(e^\alpha)^2$ oder $\sqrt{p^2+q^2}=e^\alpha$
hätten wir α gefunden so giebt die erste Gl.
$\cos\beta=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$ und die 2te Gl. $\sin\beta=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$

Der ∠ ist nun gegeben nicht durch einzigen Sinus, oder Cosinus sondern durch Sinus und Cosinus zugleich. Also die β ist etwas zu nehmen weil beyde Gl. identisch macht. Es ist zu entscheiden, ob √ das neg: oder pos: Zeichen hat. Dann denn weiß man ob der Sin ± wird ob Cos ±, und dann wissen wir in welchem quadrant β liegt. Die andere frage ist denn nur eigentlich diese α.

$$\sqrt{p^2+q^2}=e^\alpha=1+\alpha+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\dots$$

Dabei ist wunder die echte Aufgabe, denn das α ist nach Log der quad√ von p^2+q^2 wie ich nach Weisen haben, daß ich den Werth der √ kenne. Es scheint also nunmehr gehandelt zu seyn. Aber es ist nicht so, denn ich weiß α muß reell seyn. Daher schließe ich alle imaginäre Werthe von α aus und es wird sich zeigen daß der $\sqrt{p^2+q^2}$ immer positiv [illegible] zunächst ist nur ein Werth der Gl. genügt und es wird sich zeigen, wie man den Werth findet.

Dabei noch. — α muß reell seyn, denke ich mir statt α alle reellen Werthe von 0 bis unendlich fort. α=0 wird $e^\alpha=1$, denke ich mir für α etwas mehr positives, so werden alle Gl. posit: also

die Reihe positiv und > 1 also für $\alpha > 0$ und $e^\alpha > 1$ 189.
so ist jedem grössern Werthe von α grössern
Werth zugehörig. Setze ich statt α die negative
Zahl $-\gamma$ so wird $e^\alpha = e^{-\gamma} = \frac{1}{e^\gamma}$ durch ich nun statt
γ alle posit: Werthe von 0 an so ist $\frac{1}{e^\gamma}$ immer
positiv also auch e^α immer positiv wenn auch
α negativ ist, also muss die $\sqrt{p^2+q^2}$, immer
positiv genommen werden.
Ausserdem ist noch zu erinnern, dass jedem
grössern posit. Werth von α auch die Reihe grösser
und $\frac{1}{e^\gamma}$ wird immer ~~grösser~~ kleiner wenn γ wächst.
ist 1 und zwar ist der Werth von $\alpha = 0$ wenn
$+\sqrt{p^2+q^2} = 1$ ist, α ist [illegible] posit. wenn die $\sqrt{}$ grösser, und α neg: wenn dieselbe kl. ist als 1. Nennen wir $\sqrt{p^2+q^2} = a$

also ist der Werth von α mit einem der $e^\alpha = \sqrt{p^2+q^2}$ macht.

Nämlich wenn $a^x = (1+\beta)^x$ = in eine Reihe nach
Potenzen von x. der 1te Coeff. p_1 war $(\alpha-1) - \frac{1}{2}(\alpha-1)^2 + \dots\dots$
Setze ich statt $x = 1$ so bekomme ich $a = 1 + p_1 + \frac{p_1^2}{2!} + \dots = e^{p_1}$
Ferner erhalte ich $a^x = 1 + \frac{p_1 x}{1!} + \frac{p_1^2 x^2}{2!} + \frac{p_1^3 x^3}{3!} + \dots$
oder $x = 1$ wird $a = 1 + \frac{p_1}{1} + \frac{p_1^2}{2!} + \frac{p_1^3}{3!} + \dots = e^{p_1}$
der erste Coeff. p_1 war $= (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 + \dots$
nun entspricht p_1 dem α und a dem $\sqrt{p^2+q^2}$
und unsere Aufgabe ist gelöst.

Der $\cos\beta = \frac{p}{+\sqrt{p^2+q^2}}$
und $\sin\beta = \frac{q}{+\sqrt{p^2+q^2}}$
so ist Sin und Cos dem Zeichen nach gegeben, indem klar ist ob p und q pos. oder neg. ist.

Den Werthe für β sind
so ist $\sin(\pm 2n\pi + x) = \sin x$
$\cos(\pm 2n\pi + x) = \cos x$

β ist nun gleich $\pm 2n\pi + \varphi$ wo n alle Werthe
von 0 an durchläuft, so hat β unendlich viele
Werthe

Anwendung $\log(+a)$ zu finden: damit $p+qi$
dessen log wir suchen die positive Größe
werde setzen wir $q=0$ und $p=a$
und $e^{\alpha} = \sqrt{p^2+q^2} = a$ und α ist nun noch
der Reihe zu berechnen wie gewöhnlich
kommt nenne ich La so wird $\log(+a) = La + \beta i$
$\beta = \pm 2n\pi + \varphi$. Nun ist $\cos\varphi = 1$ und $\sin\varphi$ ist
0 nach den Gl. $\cos\beta = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$ und $\sin\beta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$
also ist $\log(+a) = La \pm 2n\pi i$
die Reihe $\alpha = P_1 = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \ldots$
muss noch convergent zu machen [illegible]
[illegible] wie das gemacht wird.
$\log(-a)$ zu find. damit $p+qi$ das vorstelle
muss $p = -a$ $q = 0$ sein dann ist $\cos$
$\varphi = -1$ $\sin\varphi = 0$ und daher ist $\varphi = \pi$
und $\log(-a) = L\alpha \pm (2n+1)\pi i$ wo alle
Werthe imaginär sind ich weiss
hier [illegible] was ich will

1) $\log(+a) = La \pm 2n\pi i$
2) $\log(-a) = La \pm (2n+1)\pi i$ } daraus geht hervor
3) $\log 1 = \pm 2n\pi i$
4) $\log -1 = \pm(2n+1)\pi i$ }

Jeder possit: Zahl log: ist imaginär ausser jenem einzigen wo der [illegible] ist, und ist posit. ist $a > 1$ negativ ist $a < 1$

Setzt man statt $a = 1$ so ist $La = 0$ weil $e^0 = 1$ [illegible] (2 und 3) . die 3 sind alle [illegible] imaginär ausser wenn $n = 0$ ist.

Wir wollen nun die Zahl π finden. [illegible] Zahl [illegible] Sin 1 und Cos 0 wird [illegible] statt x [illegible] [illegible] 0 [illegible] . [illegible] Zahlen [illegible] die erste [illegible]

Weiter $\operatorname{Tng} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ gezeigt ist.

Nun ist $\cos x + i \sin x = e^{xi}$ und
$\cos x - i \sin x = e^{-xi}$ durcheinander dividirt

gibt $\frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x} = e^{2xi}$ durch $\cos x$ dividirt

und $\frac{1 + i \operatorname{tng} x}{1 - i \operatorname{tng} x} = e^{2xi}$ also $2xi = \log\left(\frac{1 + i \operatorname{tng} x}{1 + i \operatorname{tng} x}\right)$

nach der Def. der Logar.

Nun ist $\log a$ die unendliche Reihe $(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \ldots$

setzt man $a = (1+z)$ so wird $\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4$ } subtrah.

setzt man $a = (1-z)$ —— $\log(1-z) = -z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4$

$$\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left(z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 \ldots\right)$$

$\log\left(\frac{1+i\,tg\,x}{1-i\,tg\,x}\right)$ entspricht $\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ also

$\log\left(\frac{1+i\,tg\,x}{1-i\,tg\,x}\right) = 2\left(it+\frac{1}{3}i^3.t^3+\frac{1}{5}i^5.t^5+\ldots\right) =$

$2i\left(t+\frac{1}{3}i^2.t^3+\frac{1}{5}i^4.t^5+\ldots\right)$

i^2 macht das − und i^4 das + bleibt u. s. f.

so wird $\log\left(\frac{1+i\,tg\,x}{1-i\,tg\,x}\right) = 2i\left(t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7+\ldots\right)$

$= 2xi$ also

A) $x = t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7+\ldots$

Nun geht es vom 0 an bis ins unendliche hat es wachsen $\frac{1}{4}\pi$. der $\sin\frac{\pi}{4}$ kann nun durch $\sin\frac{\pi}{2}$ u. $\cos\frac{\pi}{2}$ gefunden werden

denn $\sin\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1-\cos v}{2}}$ und ist $v=\frac{1}{2}\pi$ dann ist $\cos v$
$\cos\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+\cos v}{2}}$ $=0$ weil wir das vorunten gesehen weil $\frac{\pi}{2}$ ist

daher $\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{\frac{1}{2}}$ u. $\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{\frac{1}{2}}$ und die Vz. immer positiv daher $Tng\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=1$

ich setze in A) $x=\frac{\pi}{4}$ dann ist $t=1$ erhalte

$\frac{1}{4}\pi = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$

woraus π gefunden wird

die Grundidee war diese aus den Gl:

$$\cos x + i \sin x = e^{xi}$$
$$\cos x - i \sin x = e^{-xi}$$

das ~~log~~ ~~[wird]~~ Bogenlich(?) durch sin und cos, wodurch das Bogen ausgedrückt werden kann, also $\frac{\pi}{2}$ statt der sin und cos von $\frac{\pi}{2}$ ausgedrückt(?) der schon mir bekannt sind. Unabhängig(?) durch ohne Agregate ergiengst(?)

Künstliche Potenzen Logarithmen und trigonometrische Functionen

A) $a^x = 1 + P_1 x + \frac{(P_1 x)^2}{2!} + \frac{(P_1 x)^3}{3!} \cdots\cdots = S\left[\frac{(P_1 x)^r}{r!}\right]$

ist $x=1$, so ist $a = 1 + P_1 + \frac{P_1^2}{2!} + \cdots = S\left[\frac{P_1^r}{r!}\right]$

ist $P_1 = 1$ so wird $e = S\left[\frac{1}{r!}\right]$

$e^x = S\left[\frac{x^r}{r!}\right]$ daraus ist $e^{P_1} = S\left[\frac{P_1^r}{r!}\right]$ also $P_1 = \log a$

Setz ich nun in A) statt $P_1 = \log a$, welche jeden beliebigen(?) Werth annehmen(?), so wird

$$a^x = S\left[\frac{x^r \cdot (\log a)^r}{r!}\right]$$

Denkt man sich unter a positive oder absolute Zahl, dann hat log a einen einzigen reellen Werth, außer unendlich vielen imaginären. Setz ich nun statt log a den reellen Werth, so bekomme ich $a^x = S\left[\frac{x^r (La)^r}{r!}\right]$ bekanntlich ist die Reihe so hat die Reihe immer einen Werth wenn ich für x setzen was ich will, und zwar hat sie nur einen einzigen

Werth ich mag für x setzen was ich will. (a^x hat aber nur Bedeutung wenn x doch ganze Zahlen ist). Der Satz als Defin: sagt, daß wenn a pos. ist so versteh ich unter a^x. die Reihe $S\left[\frac{x^\alpha (La)^\alpha}{\alpha!}\right]$ und dieses nenne ich eine künstliche Potenz der die Reihe unendlich ist, so hat die künstl. Potenz nur einen einzigen Werth, ich mag für x setzen was ich will. sobald a positiv ist

die Reihe $S\left[\frac{x^\alpha (La)^\alpha}{\alpha!}\right]$ kann so geschrieben werden $e^{x\,La}$ weil $e^x = S\left[\frac{x^\alpha}{\alpha!}\right]$

Dadurch sind künstl. Pot. durch natürl. zurückgebracht. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ also

$e^{x \cdot La} \cdot e^{y\,La} = e^{(x+y)\,La}$ es ist strenge als das richtig ist, was sich aus natürl. Pot. ergiebt. so geht es auch mit den übrigen Formeln. Alle die 4 Formeln gelten also: Der 5te mit Einschränkung nämlich

$(a^x)^y = a^{xy}$ also $(e^{x\,La})^y = e^{xy\,La}$

ist nun der Satz richtig? der potenzirte ist keine natürliche, sie ist nur künstl. wenn $(e^{x\,La})$ positive Zahl ist, und es ist

positiv wenn x reell ist. dann e^z wenn z stellt 195
ist ist immer positiv. Und ist der Factor
künstlich, denn ist die Gl gültig
Unter künstl. Log. $\log a$ versteht ich jeden Werth
z so daß $a^z = b$ wird. aber a^z hat kaum
Bedeutung wenn nicht a posi: ist. also setzt
der künstl. Log. voraus daß die Basis a
positiv ist. Wir wollen nun alle
Werthe finden von z die die Eigenschaft haben

$a^z = e^{z La}$ nach dem vorigen folglich
ist zLa jeder Werth des natürlichen
log von b. also $z =$ dem $\frac{\log b}{La}$ jeder Werth den der natürl log hat / der einzige reellen Werth

Wir werden die Werthe $\log b$ finden sehen
wie gezeigt wenn b sein muss absolut
und die Form $p + q\sqrt{-1}$
so hat der künstliche Log eben so viel unendliche
Werthe wie der natürl Log: ist die
Basis $a = 10$ dann ist der log b der briggische
so hat auch der briggische unendliche Werthe
ist aber b positiv, dann ist einer Werth
reell und diese steht in den Tafeln.
Alle übrigen sind imaginär.
Es versteht sich daß formen der natürl log: für
die künstl: log. gelten weil sich durch
vergleich weil künstl log auch natürl
zurückgeführt werden.

Was die künstl. Arg. funct. anbetrifft.
Wenn ich den Ausd: $\frac{a^{x'}+a^{-x'}}{2} = \cos\frac{a}{x}$
setze, eben so $\frac{a^{x'}-a^{-x'}}{2} = \sin\frac{a}{x}$ und
die Resultate ergeben sich eben so
den wie früher gefundenen haben
dieses hat aber keinen praktischen
Werth, weil sich die künstl. Arg. fun-
ctionen in natürliche zurückführen lassen

Allgemeine Potenz.

Es sei a^x wo a beliebig x diff. gegen Zahl ist, diese
in Reihe entwickelt gibt $S\left[\frac{x^r(\log a)^r}{r!}\right]$

Da der natürl. log a kann aber unendlich viele
Werthe haben, jeder repräsentirt die Reihe unendlich
viele andere, doch jeder ist gleich a^x.
Ist x nicht mehr diff. gegen Zahlen, so ... so ob
die unendlich vielen Reihen einander gleich
werden, denn würde die Reihe der Def. nach
allg. Potenz geben. Will man diese Def.
zugleich ..., so schränkt dieser Begriff
allen früheren Begriffen der Potenzen
~~übrig~~ in sich. Die obige Reihe lässt sich
auch so ausdrücken $e^{x\log a}$ und das ist eine
Reihe deren Repräsentant aller übrigen ist.

so würde die allg: Potenz auch natürliche zurückgebracht. Da der Log. unendlich viel Werthe hat, so hat diese Potenz unendlich viele Werthe, obgleich die natürliche Potenz immer nur eindeutig ist. Nur dass hier der Exponent variabel ist. Wir wollen untersuchen ob a^x unendlich viele Werthe hat.

Das allgemeinste für a und x muss gesetzt werden nämlich $(p+q\sqrt{-1}) = a$ oder $= p+qi$ so $x = \alpha+\beta i$

so ist $a^x = e^{x \log a} = e^{(\alpha+\beta i)\cdot\log(p+qi)}$

Nun war $\log(p+qi) = L(+\sqrt{p^2+q^2})$ (der einzige reelle Werth) $+(\pm 2n\pi+\varphi)i$ wo $\cos\varphi = \frac{p}{+\sqrt{p^2+q^2}}$ $\sin\varphi = \frac{q}{+\sqrt{p^2+q^2}}$

also $\log(p+qi) = L(+\sqrt{p^2+q^2}) + (\pm 2n\pi+\varphi)i$

multipl. mit $\alpha+\beta i$ giebt

$$\alpha L\cdot\sqrt{p^2+q^2} - \beta(\pm 2n\pi+\varphi) + \left(\beta\cdot L\sqrt{p^2+q^2} + \alpha(\pm 2n\pi+\varphi)\right)i$$

davon ist der eine Theil reel der andere imagi.

nun wird $e^{\alpha L\cdot\sqrt{p^2+q^2} - \beta(\pm 2n\pi+\varphi)} \times e^{\left(\beta L\sqrt{p^2+q^2} + \alpha(\pm 2n\pi+\varphi)\right)i}$

u. dem 2ten ist ein imaginärer Theil und muss umgestellt werden es ist $e^{zi} = \cos z + i\sin z$

demnach wird $e^{\alpha L(\sqrt{p^2+q^2}) - \beta(\pm 2n\pi+\varphi)} \times \left[\cos\left(\beta L\sqrt{p^2+q^2} + \alpha(\pm 2n\pi+\varphi)\right) + i\cdot\sin(\cdots)\right]$

der ganze Ausdruck hat die Form $p+qi$

198

Man muss untersuchen ob alle Werthe dieses Ausdrucks für jedes x unendlich gleich sind. Ist x eine ganze Zahl dann sind die Werthe gleich. Wir können es dann nur $x = \alpha + \beta i$, wo $\beta = 0$ ist. Dann fällt der imaginäre Theil des Exp: weg der gerade variabel war und $e^{\alpha l \sqrt{p^2+q^2}}$ ist ein eindeutiger, im 2ten Factor fällt der erste Theil weg, und das übrige hat einen Werth. und der Cos von $2\mu\pi + v = \cos v$, (μ die Anzahl gemachter Umkreisungen) so wird cos der Parenthese $= \cos x\varphi$ welches eindeutig, daher der ganze Factor eindeutig. Daher ist in dieser Formel auch die Differenz potenz ausgeschlossen. Ist $x = \frac{\mu}{\nu}$ dann wird in $\alpha + \beta i$, $\beta = 0$ und $\alpha = \frac{\mu}{\nu}$. dann ist der erste Factor eindeutig wie früher der 2te Factor giebt. $\cos\left(\pm 2\alpha \, n\pi + \alpha\varphi\right) + i \sin\left(\text{[illegible]}\right)$

$$\text{d. h. } \cos\left(\pm 2\frac{\mu}{\nu} n\pi + \frac{\mu}{\nu}\varphi\right) + \text{———}$$

da ergiebt sich daß der Ausdruck nur ν Werthe hat. Es [illegible] ein Beispiel zeigt sich das deutlich dann ist $\frac{\mu}{\nu} = \frac{3}{6}$ zu setzen

199

ich setze n nach einander folgende Werthe
zu erst $n=0$ so wird $\cos 0$

$n=1$ ——— $\cos \frac{5}{6}\pi$

$n=2$ ——— $\cos \frac{10}{6}\pi$

$n=3$ ——— $\cos \frac{15}{6}\pi$

$n=4$ ——— $\cos \frac{20}{6}\pi$

$n=5$ ——— $\cos \frac{25}{6}\pi$

$n=6$ ——— $\cos \frac{30}{6}\pi$

Ist der Zufall, es ist klar daß $n=0$ und $n=\nu$ gleiche Cosinuse übrig bleiben weil erstens $\cos \frac{\mu}{\nu}\varphi$ und zweitens $\cos(2\mu\pi + \frac{\mu}{\nu}\varphi)$ und nach dem Satze daß $\cos 2p\pi + m = \cos m$ ist $\cos(2\mu\pi + \frac{\mu}{\nu}\varphi) = \cos \frac{\mu}{\nu}\varphi$. So lassen sich die Werthe in parthien eintheilen die einander gleich sind

Ist nun a^x x imaginer dann hat der Satz unendlich viele Werthe, so ist $x =$ einer irrationalen Zahl ist, weil irrationale Zahl einen Bruch bildet von unendlich vielen Ziffern im Zähler und Nenner

Daraus knüpfen sich mehrere Resultate z. B. wie muß die imag: Zahl sein für a und x damit reelle Werthe der pot: a^x reell bleiben. Dann wird man $\sin(\beta L\sqrt{p^2+q^2} + \alpha(\pm 2n\pi + \varphi)) = 0$ sein der Bogen muß also $\pm m\pi$ sein der Bogen ist aber $\beta L\sqrt{p^2+q^2} + \alpha(\pm 2n\pi + \varphi)$ derselbe $= \pm\mu\pi$.

Setzt man nun stets n, m, p, q, was man will und findet daraus α so ergeben sich für a viele imaginaire Werthe der Art.

z. B. die Werthe der potenz $(\sqrt{-1})^{(\sqrt{-1})}$ so wird $\alpha = 0$ und $\beta = 1$ in dem Werth $x = \alpha + \beta i$ denn $p = 0$ $q = 1$ und wir bekommen $e^{(\pm 2n\pi + \varphi)}$ das übrige stellt man. φ ist gegeben durch pq.

$\sin \varphi = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$ und $\cos \varphi = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$ wonach $\varphi = \frac{1}{2}\pi$

also $e^{\pm 2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ stellt alle Werthe der potenz $(i)^i$

ist $n = 0$ so ist ein Werth $e^{\frac{1}{2}\pi} = 1 + \frac{\frac{1}{2}\pi}{1} + \frac{\frac{1}{4}\pi^2}{2!} + \frac{\frac{1}{8}\pi^3}{3!} + \dots$ setzt man $n = 1$, erhält man $e^{\frac{5}{2}\pi}$ einen andern Werth u. s. f.

Nun ist die letzte Frage ob die Formel der Exponenten pot: auch noch jetzt gelten

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ oder $e^{x \log a} \cdot e^{y \log a} = e^{(x+y) \log a}$

dies ist richtig wenn man in allen drei Factoren den log a nimmt und denselben aus den unendlichen Werthen herstellt.

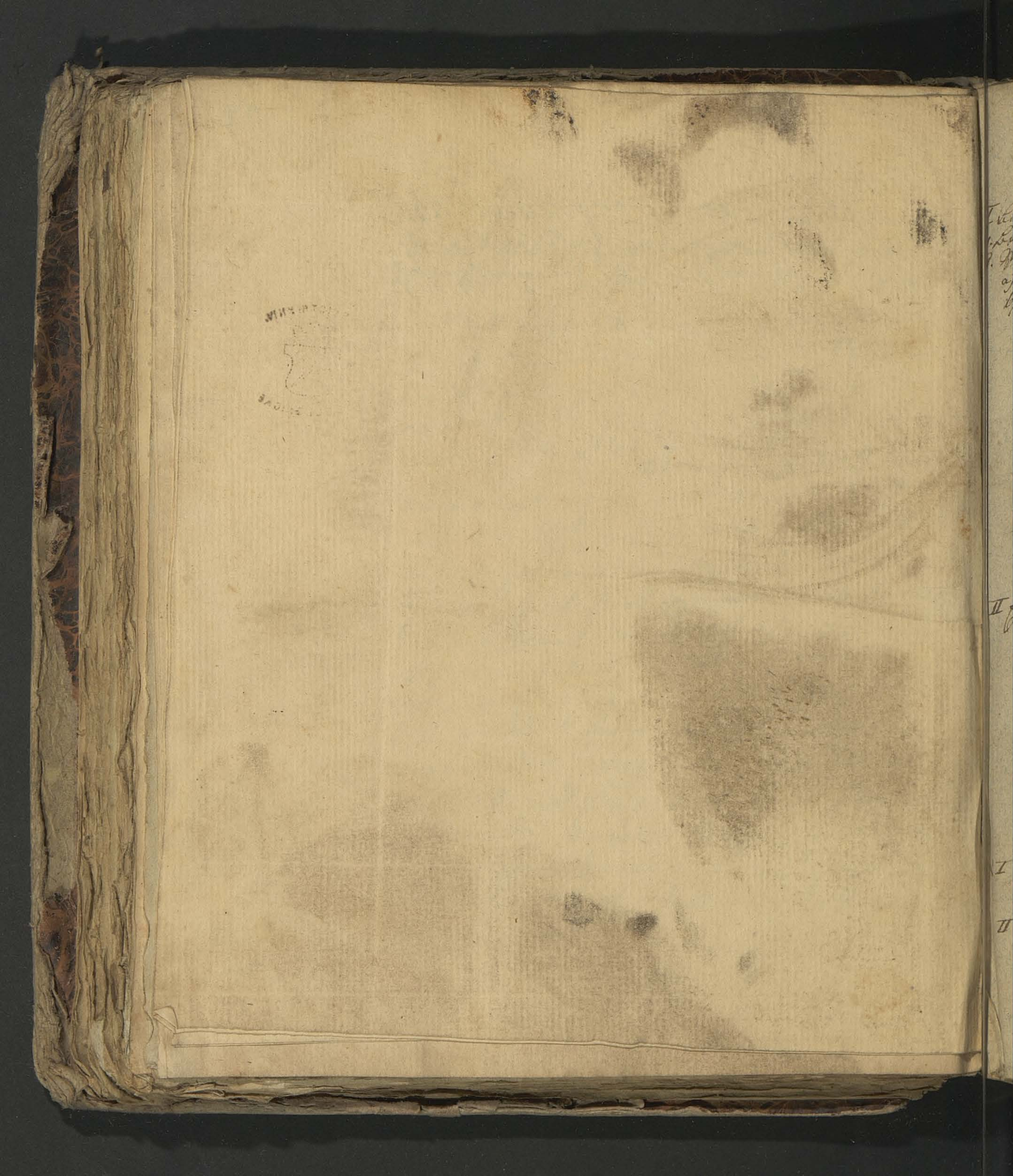
Beispiel. $(a+b)^x$ ist nach bin: Lehrs. $a^x + x a^{x-1} b + \frac{x(x-1)}{2} a^{x-2} b^2 + \dots$ ist nun x ganz vollz: so hat $(a+b)^x$ unendlich viele Werthe, soll die Reihe daher pos. eindeutig sein so müssen die unendlich vielen Werthe [illegible] diese [illegible] von dem von x [illegible] ist x positiv so hat die Reihe 1 Werth. ist $x = \frac{m}{n}$ so hat die Reihe n Werthe, ist x irrat: so hat sie unendlich viele W. eben so wenn x imaginär ist. aber a^x selbst hat unendlich Werthe aber so a^{x-1} a^{x-2} u. s. w. [illegible] der Werthe muss man statt dessen [illegible] setzen. Setzt man aber a^x einen Werth, so kann man statt folgender [illegible] die Werthe des Log: bezeichnet man durch $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ α^{IV} u. s. f. den speciellen Werth drückt man so aus. $a\|\alpha^{IV}$ d. h. der 4te Werth von a^x so wird der Satz der Potenzen $a^x\|\alpha \cdot a^y\|\alpha = a\|^{x+y}\alpha$ [illegible] modull. das ist sehr wichtig in speciellen physischen Untersuchungen. G. [illegible] mit dem [illegible] der [illegible] Math. von Ohm 1823 [illegible].

Die übrigen Formeln [illegible] auf dieselbe Art.

Allg: Logar.

Unter $\log^a b$ verstehe ich jeden Ausdruck x, der die Eigenschaft hat daß $a^x = b$. Soll man die Zahl x finden, so muß ich mir fragen, welcher der unendl. Werthe von a^x soll gleich b werden. Nehmen wir einen herausgegriffenen, so giebt es noch viele Werthe von x. Soll $e^{x \log a} = b$ werden so muß $x \log a = \log b$ (unter natürl. Logar. verstanden) also $x = \frac{\log b}{\log a}$ werden. Da $\log b$ hat unendl. Werthe u. $\log a$ hat auch unendl. viele Werthe. Zunächst setz ich statt $\log a$ einen Werth und dividire damit die unendl. Werthe $\log b$ u. s. f. so bekomme ich unendlich unendlich viel zweideutige Werthe. Ist a positiv dann giebt es einen einzigen reellen unter allen imaginären. $\log b$ hat die Form $P+Qi$ und $\log a$ auch $P_1+Q_1 i$ der Quot. giebt wieder die Form $P_{11}+Q_{11} i$, so heißt der neuen Logar: keinen neuen imaginäre Form [illegible] setz ich $Q_{11} = 0$ so bekomme ich allen Log: reell.

daraus ergiebt sich nach Bernuli, daß die
Logar: einer negativen Zahl reell sein
könne, wenn nur die basis darnach gerichtet
würde



Grundriß [illegible] Elem. Math.

Einleitung

I. Begriff der Math. ist Wiss. der Größen
2. Begriff der Größen (quantum) und (quantitat.)
3. Wahrnehmung der Größen:
   a) unmittelbar. (Augenmaß)
   b) unmittelbar. (Messen)
      α) die Größen müssen gleichartig sein
      β) Begriff der Einheit oder Maßstabs
      γ) Begriff des Verhältnisses und seiner Zeichen ÷
      δ) ist $A = \frac{p}{q} B$ und $B = \frac{q}{p} A$ so ist der qte Theil von B = dem pten Th. von A
      ε) Begriff des Verhältnisses
      ζ) Welches sind gleichwertige Größen
         η) das Verhältniß ist gleichart. Größen
   c) das unmittelbare Messen geschieht durch Zahl.
   d) Begriff der Zahl.
      α) benannte
      β) unbenannte

II Eintheilung der Math:
1. Lehre der unbenannten Zahlen
   a) besondere Arithm.
   b) Algebra
   c) Analysis des Endlichen
   d) Diff. u. Integr. R.
2) Lehre der benannten Zahlen
   a) die allgemeine Größenlehre
   b) besondere Gr. L.
      α) die Raum Gr. L.
      β) die Kraft Gr. L.

I Capitel Addition und Subtract.

§ I Begriff der Adition als Zahl und Zahlzeichen einer kommensurablen Zahlen addiren in jener ihrer Ordnung
II Begriff der Subtraction als Zahl und Zahlzeichen
(A) Definition eines Zahlen Ausdrucks, das Gleichheitszeichen, der Schreibung, der Formel, der Ungleichheit (>)

Lehrsätze

B) $(a-b)+b=a$

$(a+b)-b=a$

C) ist $a=b$ so ist $a+m=b+m$

$a-m=b-m$

$m-a=m-b$

ist $a=b$, $b=c$ so ist $a=c$

Zu I. und II

Formeln die den Grundsatz der Operationen aussprechen

1) $(a+b)-c=(a-c)+b$

2) $a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b$

3) $a-(b-c)=(a-b)+c$

4) $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$

6. Dasselbe gilt wenn mehrere Ausdrücke vorkommen

β) Erfahrung im Allgemeinen ob man sich [illegible] die Bedeutung der Buchstaben nicht bestimmen, daher

1) allgemeine Ausdrücke

2) allgemeine oder identische Gleichungen

3) die obigen Formeln finden durch sich statt.

γ) die Theorie der Null und der subtractiven und additiven Größen

1) Wiederholung der entgegengesetzten Größen

2) die obigen Formen gelten auch für diese Größen, und es ergibt sich

a) $a+0=a$

b) $a-0=a$ daher $0+b=b$

c) $a+(-b)=a-b$

d) $a-(-b)=a+b$, daher $0-(-b)=0+b=b=-(-b)$

e) $(a-b)=-(b-a)$

f) $(-a)+(-b)=-(a+b)$

g) $(-a)-(-b)=b-a$

δ) Theorie der algebraischen Summen.

I Eine alg: Summe ist Summe [illegible] add: und subt: Größe:
II die Größen [illegible] sich absolut [illegible] Größen
III alle subtr: Größe: setzen sich Summanden
IV bei alg: Summe [illegible] [illegible]
V die Summanden können in beliebiger Ordnung stehen
VI Wie werden alg: Summen addirt und subtrahirt

ε) wie man auch Summen Differenz und Größen durch Addit: und Subt: verbinden mag, so erhält man immer zum Resultat: immer nur eine Summe oder Differenz

ζ. die Differenz $(a-b)$ umfaßt alle die drei formen der Größen

II Capitel Multipl: u. Division

A. I Was ist Multipl: Product. Coeff: factoren?
II Wie multiplizirt man
III ist $a=b$ so ist $ma=bm$ wenn [illegible] absol: Zahl: sind
IV Gesetze der Multipl:
1) $m(a+b) = ma+mb$
2) $m(a-b) = ma-mb$
3) $ab = ba$
4) $c(ab) = a(bc) = b(ac)$

B. I. Was ist division quotient dividend und divisor?
wie [illegible] sich gegen absol: Größe: [illegible]
II) $b \cdot \frac{a}{b} = a$
$\frac{ba}{b} = a$
III) ist $a=b$ so ist $\frac{a}{m} = \frac{b}{m}$ und $\frac{m}{a} = \frac{m}{b}$

C I [illegible]
1.) ein Prod: am ist nur [illegible] soviel m eine [illegible] abs: Zahl ist. a kann [illegible] m mal [illegible] multipl.
2) ein Diff: Prod am ist, wenn m eine Diff: zwischen Zahlen ist $= \mu - \nu$ und bedeutet $\mu a - \nu a$ [illegible]
3) Quot: $\frac{a}{b}$ ist eine Diff: [illegible] so ergibt [illegible] $= \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$
4.) Alle [illegible] formeln gelten auch für [illegible] durch [illegible]

dividiren, weil alsdann die Bedeutung des Quot: unabhängig ist.

II. Der allgemeine Quot: [illegible] zeigt die Bedeutung d. [illegible] – [illegible] [illegible]

a) Sätze. 1) $\frac{a+b}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$

2) $\frac{a-b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}$

3) $m \cdot \frac{a}{b} = \frac{ma}{b} = \frac{a}{b:m} = a : \frac{m}{b}$

4) $\frac{a}{b} : m = \frac{a:m}{b} = \frac{a}{bm}$

5) $a : \frac{b}{m} = a \cdot \frac{m}{b}$

6) $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ und $\frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m}$.

7) $a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$

8) $a - \frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c}$

9) $\frac{b}{c} - a = \frac{b-ac}{c}$

10) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cd}{bd}$

11) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-cd}{bd}$

12) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

13) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a:c}{b:d} = \frac{ad}{bc}$ (weil $a : \frac{m}{b} = \frac{ab}{m}$)

b) Ausdehnung dieser Sätze auf Summen von mehreren Gliedern und Producten von mehreren Factoren.

c) Ausdehnung der Sätze auf 0 und subtractive Zahlen und algebr: Summen.

d) Der Satz $\frac{A}{B} = x + \frac{A-Bx}{B}$ welcher zur prakt. Division und der der algebr: Summen [illegible]

D. Von positiven und negativen Ausdrücken
E. Theorie der grösseren und kleinern
1) ist $a > b$ so ist $a+m > b+m$

$$a-m > b-m$$
$$m-a < m-b$$
$$am \lesseqgtr bm$$
$$\frac{a}{m} \lesseqgtr \frac{b}{m}$$

2) ist $a > b$ und $c > d$ so ist $a+c > b+d$

$$a-d > b-c$$
$$a.c \lesseqgtr b.d$$
$$\frac{a}{d} \lesseqgtr \frac{b}{c}$$

F. Von reellen Zahlen

III Capitel

Potenzen und Wurzeln

α. Speciellen Theil
A. Potenzen wo der Exponent absol. Zahl ist und der Dignand absolute Zahl.

A I. Was ist Potenz, Dignand, Exponent?
II Rechnen der Potenzen
III Unter der Voraussetzung, daß der Exp. eine absol. Zahl ist gelten Sätze
1.) $a^m . a = a^{m+1}$
2) $a^m . a^n = a^{m+n}$
3) $a^m : a^n = a^{m-n}$
4) $(ab)^m = a^m . b^m$
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
6) $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$
7) Dieselben Sätze [illegible] auch [illegible] mehrgliedrige Ausdrücke.

IV Unter derselben Voraussetzung nur daß auch a und b absolute [illegible] und [illegible] oder 0 sind gilt
1) wenn $a > b$ daß $a^m > b^m$
2) ein echter Bruch $\frac{\alpha}{\beta} > \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^m$ und $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^m < 1$
3) ein unechter [illegible] und ist > 1

§ Wurzeln wenn der Radicand die Diff a-b der Exponent absolute ganze Zahl ist.

§ I. Begriffe der Wurzel, des Radicanden und des Wurzel Exponenten.

II Benennungen der Wurzel

III die Wurzel hat immer nur einen bestimmten Werth

IV Sätze über Wurzeln

1) $(\sqrt[m]{a})^m = a$

2) $\sqrt[m]{(a^m)} = a$

3) $\sqrt[m]{(ab)} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$

4) $\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$

5) $\sqrt[m]{(a^n)} = (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$ die Parenthesen weglassen

6) sind m n p ganze Zahlen wenn m:p so ist

$\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[mn]{a}$

7) $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m:p]{a^{n:p}}$

8) $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

§ I. höherer allgemeiner Theil

A. Gebrochene Potenzen bei absoluten Dignand

1) a^μ ist gebrochen sobald μ = einem Bruche $\frac{n}{m}$ und bedeutet $\sqrt[m]{a^n}$

2) ist $\frac{n}{m} = \frac{p}{q}$ so ist $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[q]{a^p}$

3) die Formeln der ganzen Potenzen gelten auch für gebrochene Potenzen

§ II. höherer allg. Theil.

B. 1) Differenz Potenzen bei absol. Dignand sobald $\mu = \alpha - \beta$ so ist $a^\mu = \frac{a^\alpha}{a^\beta}$

2) ist $\alpha - \beta = \gamma - \delta$ so ist $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = \frac{a^\gamma}{a^\delta}$

3) die Formeln der ganzen Potenzen gelten auch für Differenz Potenzen

4) daraus ergibt sich daß $a^1 = a$; $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

§ höchster allg. Theil der höheren Analyse.

wenn auch der Dignand absolut beliebig ist gesetzt

IV Capitel

Anwendungen

A. Ziffernrechnung.

I Numer. 1. Einschreibung der Zahlen nach Ordnungen

2) begreiflich einzelner Einheiten der Ordnungen durch Z. und deren Stellungen

3. [illegible] Einschreiben der num: Zahl durch Auslassung der Z. daher entsteht die

4) Einschaltung der 0

5) Einschiebung der Decimalzahlen statt Z. und [illegible]

6) das Aussprechen der Zahlen gründet sich bei mehrzifrigen Ziffern auch die ~~Einh~~ b Buchstaben [illegible] der gemeinen ~~Classe~~

Für die 4 Species 1) [illegible] mit Decimalzahlen multipl. und divid.

2) die Add. u. Subt. der Ziffern gründet sich darauf daß ~~die~~ numerische Zahlen algebr: Summen sind

3) die Multipl. gründet sich wie algebr. Summen multipliziert werden.

4. die Division gründet sich auch den Satz $\frac{A}{B} = x + \frac{A - Bx}{B}$

II Von den Prim und zusammengesetzten Zahlen

1) einfache und zusammengesetzte factoren

2) ist $\frac{a}{b}$ = z.B. $\frac{8}{4}$ $\frac{\text{Vielfaches}}{\text{Theiler}}$ ist = $\frac{8}{6}$ aliquoter / aliquanter

3) gerade und ungerade Zahl

4) jede ~~Prim~~ Zahl läßt sich nur auf eine Art in einzelne Primzahlen zerlegen

5) jede Zahl ist durch Producte einzelner Primzahlen theilbar

6) ist a durch b theilbar so sind die factoren b zugleich die factoren von a und die übrigen factoren von a geben die factoren von $\frac{a}{b}$

7) Von gemeinschaftl. Theiler und ganz Vielfachen und relativen Primzahlen

8) ist m g. Th. von a, b so sind die factoren von m in denen von a und b enthalten; ist m der größte g. Th. so haben a und b nur die factoren m unter einander gemein

9) ist a g. V. von m, n, p so muß es durch die factoren von m, n, p theilbar sein und ist a das kleinste Vielfache so muß sie nur aus diesen factoren bestehen

[illegible]

2	14,	21,	6,	9,	15,	8
3	7		3			4
7		7	1	3	5	
	1	1	1	3	5	4

10) wie wird eine Zahl in Primzahlen zerlegt
11) wie findet man das gemeinsch. kleinste Vielfache
12) ist $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$ so ist der größte g. Theiler von a und b, ein Factor von r, und der größte g. Theiler von b u. r, der von a
13) worauf gründet sich, wie man den größten gemeinschftl. Theiler findet

Commentar
Zu Ohms Elem: Math: I Theil

Zu §.4 zu finden in der Hinsicht:

Es ist klar, daß sobald der q^{te} Theil von B, p mal genommen A giebt, daß auch der p^{te} Theil von A, q mal genommen B giebt. denn $\frac{p}{q}B = A$ Will ich nun B wieder zu erhalten so muß ich es so zerlegen, wie ich es zusammengesetzt habe d.h. ich muß $\frac{p}{q}B$ oder A in p Theile zerlegen und solcher Theile q nehmen so erhalte ich $\frac{q}{p}A = B$

Zugleich auch da $\frac{p}{q}B = A$, so ist $\frac{B}{q} = \frac{A}{p}$. denn wenn ich $\frac{p}{q}B$ in p Theile zerlege so erhalte ich einen q^{ten} Theil von B, und da $A = \frac{p}{q}B$ so giebt auch A in p Theile zerlegt, oder der p^{te} Theil von A den q^{ten} Theil von B.

Zu §6 Cap I

Dieser § war nöthig, um aus den folgenden Sätzen der Addition u. Subtr: als Gründe der übrigen Operationen, zugleich andere Formeln entwickeln zu können.

Zu §7. Beispiele

1) $[(a-b)-c]+b = [(a-b)+b]-c = a-c$

2) $[(a+b)+(b-c)]-b = [(a+b)-b]+(b-c) = a+(b-c)$

3) $[(p-q)-(r-s)]+q = [(p-q)+q]-(r-s) = p-(r-s)$

4) $[(p+(q-d))+(m-a)]-(q-d) = [(p+(q-d))-(q-d)]+(m-a) = p+(m-a) = (m+p)-a$

5) $[(a-b)-c]+(b+c) = [(a-b)+(b+c)]-c = [(b+c)-c]+(a-b) = b+(a-b) = a$.

2) Gegebene Beispiele

~~$\big((a-c)+a\big)+(c+b)-\big((a+b)+c\big)=\big[\big((a-c)+c\big)+(a+b)\big]-\big((a+b)+$~~

~~$\big[(a-c)+a\big]-\big[(a+b)-c\big]+c+b=$~~

~~$=\big[a+(a+b)\big]-\big[(a-b)+c\big]=\big[(a+b)-(a-b)+c\big]+a=$~~

~~$=c+a$~~

$$1)\ \big[\big|(a-c)+a\big|+(c+b)\big]-\big|(a+b)+c\big|=\big[\big|(a-c)+c\big|+a+b\big]-\big|(a-b)+c\big|$$

$$\big|(a+b)+a\big|-\big|(a-b)+c\big|=\big[(a+a)-\big|(a-b)+c\big|\big]+b=$$

$$=\big[(a+a)-\big|(a+c)-b\big|\big]+b$$

$$2)\ \big[|a+c|+b\big]+\big[|c+b|-a\big]=\big[(c+b)+(a-c)+b\big]-a=$$

$$=\big[c+(a-c)\big]-a=a-a$$

Zu §9 Beispiele $\big[(a+a)-\big[(a+c)-b\big]\big]+b=(a+a)-\big[\big((a+c)-b\big)-b\big]=$

$$(a+a)-\big((a+c)-(b+b)\big)=\big((a+a)-(a+c)\big)+(b+b)$$

In diesen Formeln müssen folgende Anzeigen enthalten sein

1. wie man eine Größe zu einer Summe adirt durch folgende Formel — $(a+b)+c=(a+c)+b$
2. — Differenz — $(a-c)+b=(a+b)-c$
3. — von — Summe subtrahirt — $(a+b)-c=(a-c)+b$
4. — von — Differ: subtrahirt — $(a-b)-c=a-(b+c)$
5. — eine Summe zu einer Größe adirt — $a+(b+c)=(a+b)+c$
6. — von — subtrahirt — $a-(b+c)=(a-b)-c$
7. — Differenz zu — adirt — $(a-b)+c=a-(b-c)$
8. — von — subtrahirt — $a-(b-c)=(a-b)+c$
9. wie man Differenzen adirt } — $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$
10. wie man Summen subtrahirt }

Hätte ich ferner $(a+b)+(c+d)$ zu erklären so sähe ich nach §2, daß hier die Ordnung nichts verändert, mache ich es = mit $(a+c)+(b+d)=(b+c)+(a+d)$ etc.

Hätte ich $(a-b)-(c-d)$ oder
$(a-b)-(c+d)$ oder
$(c+d)-(a-b)$
$(a-b)+(c+d)$

so gehen die Verwandlungen aus den bekannten Grundformeln nicht hervor man müßte denn, wenn zu Klammern eingeschlossenen Ausdruck nur als Zeichen, aber nicht als Summe oder Differenz betrachten, denn können sich die 10 Formeln anwenden

Zu §10 und 11.

$$\left|(a-b)-d\right| + \left|b-(c-d)\right| = \left|(a-b)+b\right| - \left|(c-d)+d\right| = a-c$$

$$(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$$

$$(a-b)+(c-d)+(e-f)=\left[(a+c)-(b+d)\right]+(e-f)=$$
$$=(a+c+e)-(b+d+f)$$

Zu §16

1) $(-b)+(-a)=(0-b)+(0-a)=(0+0)-(a+b)=-(a+b)$

2) $(0+0=(p-p)+0=(p-p)=0$

3) $(-b)-(-a)=$ ~~$(0-b)-(0-a)$~~ $=(-b)+a=a-b$

Zu §20

1) $(3a-2b-4c+d)+(2n-a+b-3c-p+q)=$
$=2a-b-7c+d+2n-p+q$

2) $(3a-2b-4c+d)-(2n-a+b-3c-p+q)=$
$=3a-2b-4c+d-2n+a-b+3c+p-q=4a-3b-c+d-2n+p-q.$

II Capitel

zu §. 25. Wenn $a = b$ so ist $ma = mb$, daher Beyspiele nur unter der Voraussetzung daß $a, b, \ldots$ absolute (vorausgesetzt gleiche) G. Zahlen sind. z. B.

$$\frac{2+3 = 8-3}{4+6 = 16-6} \quad \text{oder auch} \quad \frac{2+3 = 8-3 \quad -2 \quad -2}{-4-6 \quad -16+6}$$

§ 26. $c(ab) = a(bc) = b(ac)$ denn

$c(ab) = ab + ab + ab + ab + \ldots\ c$ mal, nach der Formel $m(a+b) = ma + mb$ und

$ab + ab + \ldots\ c$ mal $= a(bc) = b(ac)$

§ 34. Da nun zuerst die Beweise der Subtr. u. Ad. aus dem Begriffe der Subtr. geschlossen worden, so werden jetzt die Beweise der Formeln der Multip. u. Divis. aus dem Begriffe der Divis. geführt. z. B.

§ 37. $a : \frac{b}{m} = a \cdot \frac{m}{b}$

denn $\left(a \cdot \frac{m}{b}\right) \frac{b}{m} = b \cdot \frac{m}{b} \cdot \frac{a}{m} = m \cdot \frac{a}{m} = a$

§. 38 $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ denn $\frac{a}{b} \cdot bm = am$

$\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}$ denn $\frac{a}{b} \cdot (b : m) = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{m} = \frac{\frac{a}{b} \cdot b}{m} = \frac{a}{m} = a : m$

§ 39 $a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$ denn $\left(a + \frac{b}{c}\right) c = ac + \frac{b}{c} \cdot c = ac + b.$

$a - \frac{b}{c} = \frac{ac - b}{c}$ denn $\left(a - \frac{b}{c}\right) c = ac - \frac{b}{c} \cdot c = ac - b$

$\frac{b}{c} - a = \frac{b - ac}{c}$ denn $\left(\frac{b}{c} - a\right) c = \frac{b}{c} \cdot c - ac = b - a$

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$ denn $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)bd=$ §40.

$=\frac{a}{b}\cdot bd+\frac{c}{d}\cdot bd=ad+cb.$

§41

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ denn $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot bd=ac$

~~$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a:c}{b:d}$ denn $\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{b}{d}=\frac{(a:c)b}{(b:d)d}=\frac{(a:c)b}{b}=a:c$~~

~~$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$ denn $\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)bc=\frac{(a:c)bc}{b:d}=(a:c).$~~

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a:c}{b:d}$ denn $\left(\frac{a:c}{b:d}\right)\cdot\frac{c}{d}=\frac{(a:c)c}{(b:d)d}=\frac{a}{b}$

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$ denn $\left(\frac{ad}{bc}\right)\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b}$ daß man auch auf die Art dividiren darf, ergiebt sich aus der Formel $a:\frac{b}{m}=\frac{am}{b}$

$0\cdot 0=(p-p)\cdot(p-p)=pp-pp-pp+pp=0$

$0\cdot a=(p-p)a=ap-ap=0$ §43.

$\frac{0}{a}=\frac{p-p}{a}=\frac{p}{a}-\frac{p}{a}=0$

$(-b)\,a=(0-b)a=0-ab=-ab$

$(-b)\cdot(-a)=(0-b)(0-a)=0+ab=ab$

$\frac{-b}{a}=\frac{0-b}{a}=0-\frac{b}{a}=-\frac{b}{a}$

$\frac{b}{-a}=\frac{b}{0-a}=-\frac{b}{a}$ denn $\left(-\frac{b}{a}\right)\cdot(-a)\;\frac{ba}{a}=b$ } diese 2 Sätze würde ich nun aus der Lehre weggelassen

$\frac{-b}{-a}=\frac{b}{a}$ denn $\frac{b}{a}(-a)=-\frac{ba}{a}=-b$ } haben, da sie die nach [illegible] durch den Satz a-b noch eine Erklärung wären, der Verfasser diejenigen Formeln anführte die der Lehrer zu einem nach Differenzen dividire. Doch auch die ganze Formel-aufstellung hat übel an sich, daß man nicht weiß

warum gerade die Identität zwischen-
-dinge und nicht auf eine andere
Weise entspringt. Die ganze Beweis:
methode ist nichts anderes als eine
Probe die die Richtigkeit der Formeln
controlirt. Von der Art ist auch der Satz

§ 46. $\frac{A}{B} = x + \frac{A-Bx}{B}$ denn

$$\left(x + \frac{A-Bx}{B}\right)B = Bx + A - Bx = A$$

daraus ist $\frac{23}{6} = 3 + \frac{23-18}{6} = 3 + \frac{5}{6}$

$\frac{1}{1+b} = 1 + \frac{1-1-b}{1+b} = 1 - \frac{b}{1+b}$

~~$-\frac{b}{1+b} = -b + \frac{-b-b+bb}{1+b} = b + \frac{bb}{1+b}$~~

~~$\frac{bb}{1+b} = bb + \frac{bb-bb+bbb}{1+b} = bb + \frac{bbb}{1+b}$ u. s. f.~~

$\frac{b}{1+b} = b + \frac{b-b-bb}{1+b} = b - \frac{bb}{1+b}$ daher $\frac{1}{1+b} = 1 - b + \frac{bb}{1+b}$

$\frac{bb}{1+b} = bb + \frac{bb-bb-bbb}{1+b} = bb - \frac{bbb}{1+b}$ daher

$\frac{1}{1+b} = 1 - b + bb - \frac{bbb}{1+b}$ u. s. f.

$\frac{1}{1-b} = 1 + \frac{1-1+b}{1-b} = 1 + \frac{b}{1-b}$

$\frac{b}{1-b} = b + \frac{b-b+bb}{1-b} = b + \frac{bb}{1-b}$ daher $\frac{1}{1-b} = 1 + b + \frac{bb}{1-b}$

$\frac{bb}{1-b} = bb + \frac{bb-bb+bbb}{1-b} = bb + \frac{bbb}{1-b}$ daher

$\frac{1}{1-b} = 1 + b + bb + \frac{bbb}{1-b}$ u. s. f.

Nun setzen wir sich auch hier d. die prakt. Division fortzuf.

$$-a+b\,|\,am-an+ap-bm+bn-bp\,|\,-m+n-p \qquad \S\ 47.$$

$$\begin{array}{l} am-bm \\ \hline \quad -an+ap+bn-bp \\ \quad -an\qquad +bn \\ \hline \qquad ap-bp \\ \qquad ap-bp \\ \hline \end{array}$$

§ 50

Und abm positiv so ist wenn $a>b$ $am>bm$

denn $am-bm=(a-b)m$ gleich also einer pos. Zahl

auch ist $\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$ denn $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}$

$\frac{m}{a}<\frac{m}{b}$ denn $\frac{m}{a}-\frac{m}{b}=\frac{mb-ma}{ab}=\frac{(b-a)m}{ab}$ einer neg. Zahl.

Haben a und b einerlei Zeichen daß ab pos. wird so ist $\frac{(b-a)m}{ab}$ positiv wenn m neg: negativ wenn m positiv ist.

Haben a und b entgegengesetzte Zeichen daß ab neg. ist so ist $\frac{(b-a)m}{ab}$ positiv wenn m pos. neg wenn m neg: ist.

Bei Zahlen [illegible] man diese Größe und Kleineren, wenn man auf beyden Seiten gleiches addirt oder subtrahirt z. B.

$1>-4$ addir man 6 erhält $7>3$ u. s. f.

§ 51.

Ist $a>b$ und $c>d$ so ist $a+c>b+d$ und
$a-d>b-c$

denn ist $(a-b)$ und $(c-d)$ positive Zahlen so ist auch eine positive Zahl die Summe $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)=$
$=(a-d)-(b-c)$

Ohne Beweis ist es so wenn $a > b$ so ist $a = b+q$ denn $c > d$ so ist $ac > ad$

$ad = (b+q)d = bd+qd$

d.i. $ac > bd+qd$ desto grösser als bd.

und daraus wenn

$$\frac{ac > bd}{cd} = \frac{ac}{cd} > \frac{bd}{cd}$$

$$\frac{a}{d} > \frac{b}{c} \quad a:d > b:c$$

Ist $a > b$ und $c > d$ und sind alle positiv so ist $a.c > b.d$ denn $ac - b.d = (a-b)c + (c-d)b$ also einer positiven Zahl.

Auch ist denn $a:d > b:c$ denn

$(a:d) - (b:c) = \frac{a}{d} - \frac{b}{c} = \frac{ac-bd}{dc}$ auch einer posit. Zahl

Hingegen sind a, b, c, d nicht positive Zahlen denn ist $ac - bd$ gleich einer posit. Zahl wenn a und c [illegible] und b und d [illegible] Zahlen aber; gleich einer neg. Zahl [illegible] werden soll

Noch ist zu bemerken daß der Satz die Differenz der grösseren Grössen ist $>$ als die der kleineren Grössen nur für absolute Zahlen gilt z. B.

$$4 > \frac{3}{2} \text{ und } \frac{11}{3} > \frac{1}{4}$$

so ist $4 - \frac{11}{3}$ oder $\frac{12-11}{3}$ oder $\frac{1}{3}$ nicht grösser als $\frac{3}{2} - \frac{1}{4}$ oder $\frac{6-1}{4}$ oder $\frac{5}{4}$

So auch die Quotienten nach derselben Art.

§. 51* 17 [illegible]?

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{ac+ab}{bc} = \frac{a(b+c)}{bc}$$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right)(b+c) = a + \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + a$$

gibt auch keinen Beweis es müßte denn $a=0$ seyn

18ten Schulfrage

1) $(a+c) - (b+c) = a-b$

denn $(b+c)+(a-b) = ((b+c)-b)+a = c+a$ (gut)

2) $(a-c) - (b-c) = a-b$

denn $(b-c)+(a-b) = (b+a)-(c+b) = (b-b)+(a-c) = a-c$

~~$(a-c)-(b-c)+b$ ... $(a+b)+(b-c)-c$~~

3. $(a \cdot c) - (b \cdot c) = a-b$ ~~denn~~ hier

$b \cdot c+(a-b) = abc - bbc = (a-b)bc$ erhaltet sich

nur unter der Voraussetzung daß $c = 1$ ist

4. $(a:c) - (b:c) = a-b$ denn

$b:c\,(a-b) = \frac{b}{c}(a-b) = \frac{ab-bb}{c} = \frac{(a-b)b}{c}$

$(a-b) + b \cdot c$ wird nur dann gleich sein

ac wenn $c = 1$ ist.

Ebenso 4. $a:c) - (b:c) = a-b$ hier

wird eben-falls $(a-b)+\frac{b}{c} = ac$ oder a wenn

$c = 1$ ist.

20 Schulfrage

Soll $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ so muss

$\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)(b+c) = a$ sein also $a+\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+a$

den Werth für c zu finden kann man

bloß vermittelst einer Gleichung erhalten

Com: Olim Ez. Math

10 $\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{x}\right)(b+x)=a$

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{x}=\frac{a}{b+x}$$

$$\frac{ax+ab}{bx}=\frac{a}{b+x}$$

$$abx+ab^2+ax^2+abx=abx$$

$$ax^2+abx=-ab^2$$

$$x^2+bx=-b^2$$

$$x=\pm\sqrt{-b^2+\frac{b^2}{4}}-\frac{b}{2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3b^2}-\frac{b}{2}$$

wir sehen also, welcher Werth [illegible] werden muss.

21. Schlußfolge $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$ denn $\frac{a}{b}\cdot bc=a\cdot c$

$\frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c}$ denn $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{c}=a:c$

Soll $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+c}$ so muss

$\left(\frac{a+c}{b+c}\right)b=a$ d.h. $\frac{ab+bc}{b+c}=a$ das wird geschehen wenn $c=0$ ist.

denn auch nach der Gl. $\frac{ab+bc}{b+c}=a$

also $ab+bc=ab+ac$

$$bc=ac$$

$$bc-ac=0$$

$$(b-a)c=0$$

$$c=0.$$

Soll $\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-c}$ so muss $\left(\frac{a-c}{b-c}\right)b=a$ sein d.h. $\frac{ab-cb}{b-c}=a$

dies gilt unter derselben Voraussetzung

24 Schusterbogen

$\frac{a}{b}, \frac{c}{bd}, \frac{m}{d}, \frac{p}{dq}$ verwandelt

~~also~~

$\frac{adq}{bdq}\ \frac{cq}{bdq}\ \frac{mbq}{bdq}\ \frac{bp}{bdq}$

25 Sch. fr.

Ist $a > b$ und $c > d$

$a.c > b.d$ denn $a-b$ und $c-d$ sind pos. Zahlen

~~daher $(a-b)+(c-d) = a$~~

$a.c - b.d$ muss auch positive Zahl sein

$(a.c)-(b.d) = (a-b)c + (c-d)b$ welches eine positive Zahl gibt wenn c und b positive Zahlen sind

Ist $a > b$ und $c > d$ so soll $(a-c) > (b-d)$ u

$(a-b) + (c-d)$ gibt eine positive Zahl

so lässt sich aber nicht in $(a-c)-(b-d)$ verwandeln daher ist $(a-c)-(b-d)$ nicht nothwendig eine positive Zahl

Ist $a:c > b:d$, so muss $\frac{a}{c} - \frac{b}{d}$ eine pos. Z. = sein

d. i. $\frac{ad-bc}{cd} = \frac{(a-b)d+(d-c)b}{cd}$ was nicht pos. ist.

<u>III Capitel</u> Ist $\frac{D}{\delta}$ ein unechter Bruch so §62

ist $D/\delta > 1$ daher wenn m absol. ganz Zahl ist

$(D/\delta)^m > 1^m > 1$ denn ist $D/\delta > 1$ so ist

$\frac{D}{\delta}\cdot\frac{D}{\delta} > 1\cdot\frac{D}{\delta} > \frac{D}{\delta}$ eben so

$\frac{D}{\delta}\cdot\frac{D}{\delta}\cdot\frac{D}{\delta} > \frac{D}{\delta}\cdot\frac{D}{\delta} > \frac{D}{\delta}$ u. s. f.

zu §66. $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}$ denn $(\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{a})^m\cdot(\sqrt[m]{b})^m = ab$

$\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$ denn $\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{a}{b}$

Beispiel $\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$;

$\sqrt[4]{a^4\cdot bc^2} = \sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{b}\cdot\sqrt[4]{c^2} = a\cdot\sqrt[4]{b}\cdot\sqrt[4]{c^2}$

§67. $\sqrt[m]{(a^n)} = (\sqrt[m]{a})^n$ denn $((\sqrt[m]{a})^n)^m = (\sqrt[m]{a})^{mn} = a^n$

§68 $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[mn]{a}$ denn $\left(\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})}\right)^{mn} = (\sqrt[n]{a})^n = a$

$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}$, denn $(\sqrt[m]{a^n})^{mp} = (a^n)^p = a^{np}$

$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m:p]{a^{n:p}}$ denn ~~$(\sqrt[m]{a^n})^{m:p}$~~ setzt man statt m und n $\frac{m}{p}$ $\frac{n}{p}$ [illegible] man kein [illegible] so gelten alle die Formeln nur wenn die Zahlen selbst ganz absolute sind als auch die Diff. und Quot. aus ihnen selbst bestehen, so ergiebt sich der Ausdruck [illegible]

§70. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ denn $\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m = a^{\frac{nm}{m}} = a^n$

$\sqrt[m]{a^{3m}} = a^3$; $\sqrt[m]{\left(\frac{a^{3m}}{b^{2m}}\right)} = \frac{a^3}{b^2}$

§71 $a^{\frac{n}{m}}$ als gebrochener Potenzexponent $\sqrt[m]{a^n}$ sobald $\frac{n}{m}$ ein wirklicher Bruch ist. Ist es aber eine ganze Zahl z. B. $a^{\frac{4}{2}} = a^2$ so ist auch $\sqrt[2]{a^4}$ oder $\sqrt[2:2]{a^{4:2}} = a^2$ derselben, also der spezielle Fall im allgem. eingeschlossen.

Es kann sich ereignen daß $\frac{n}{m} = \frac{p}{q}$ daher die Gleichung $a^r = \sqrt[m]{a^n}$ und $= \sqrt[q]{a^p}$ und ist also immer $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[q]{a^p}$ sobald $\frac{n}{m} = \frac{p}{q}$ ist.

denn $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ und $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$ welche die Expon und Dignanden gleich oder

$(\sqrt[q]{a^p})^m = \sqrt[q]{a^{pm}}$ nun aber $\frac{n}{m} = \frac{p}{q}$ heißt $\frac{nq}{mq} = \frac{mp}{mq}$ also $nq = mp$

daher $\sqrt[q]{a^{pm}} = \sqrt[q]{a^{nq}} = a^n$

Oder beweist es noch anders nämlich

$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mq]{a^{nq}}$ und

$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[mq]{a^{mp}} =$ ~~[illegible]~~ da nun $mp = nq$

so ist $\sqrt[mq]{a^{nq}} = \sqrt[mq]{a^{mp}}$

Ob die Formeln das ganze Potenzen für gebrochene §72. Exponenten gelten?

1) $a^m . a = a^{m+1}$ $\quad a^{\frac{\alpha}{\beta}} . a = a^{\frac{\alpha}{\beta}+1} = a^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}$ d. h.

$$\sqrt[\beta]{a^\alpha} = \sqrt[\beta]{a^{\alpha+\beta}}$$ denn $(\sqrt[\beta]{a^{\alpha+\beta}})^\beta = a^{\alpha+\beta}$ also müßte a^α

[illegible] gilt diese Formel nicht

Untersuchung. $a^{\frac{\alpha}{\beta}} . a$ zwei Potenzen werden multiplicirt wenn man ihrer Exponenten Summe als Exponent über den gemeinschaftlichen Dignand setzt so müßte $a^{\frac{\alpha}{\beta}} . a = a^{\frac{\alpha}{\beta}+1} = a^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}$
daher muß im [illegible] abermals

$$a^{\frac{\alpha}{\beta}} . a = a^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}$$ d. h.

$(\sqrt[\beta]{a^\alpha}) . a = \sqrt[\beta]{a^{\alpha+\beta}}$ denn $((\sqrt[\beta]{a^\alpha}) a)^\beta = a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ ganz richtig

2. formel $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ d. i.

$$a^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot a^{\frac{\gamma}{\delta}} = a^{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}} = a^{\frac{\alpha\delta+\gamma\beta}{\beta\delta}}$$ d. i.

$$\sqrt[\beta]{a^\alpha} \cdot \sqrt[\delta]{a^\gamma} = \sqrt[\beta\delta]{a^{\alpha\delta+\gamma\beta}}$$ denn

$$\left(\sqrt[\beta]{a^\alpha} \cdot \sqrt[\delta]{a^\gamma}\right)^{\beta\delta} = a^{\alpha\delta} \cdot a^{\gamma\beta} = a^{\alpha\delta+\gamma\beta}$$

3 formel. $a^m : a^n = a^{m-n}$ d. i.

$$a^{\frac{\alpha}{\beta}} : a^{\frac{\gamma}{\delta}} = a^{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}} = a^{\frac{\alpha\delta-\gamma\beta}{\beta\delta}}$$ d. i.

$$\sqrt[\beta]{a^\alpha} : \sqrt[\delta]{a^\gamma} = \sqrt[\beta\delta]{a^{\alpha\delta-\gamma\beta}}$$ denn

$$\left(\frac{\sqrt[\beta]{a^\alpha}}{\sqrt[\delta]{a^\gamma}}\right)^{\beta\delta} = \frac{a^{\alpha\delta}}{a^{\gamma\beta}} = a^{\alpha\delta-\gamma\beta}.$$

4. formel $(ab)^m = a^m \cdot b^m$ d. i. $(ab)^{\frac{\alpha}{\beta}} = a^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot b^{\frac{\alpha}{\beta}}$

oder $\sqrt[\beta]{(ab)^\alpha} = \sqrt[\beta]{a^\alpha} \cdot \sqrt[\beta]{b^\alpha}$ denn

$$\left(\sqrt[\beta]{a^\alpha} \cdot \sqrt[\beta]{b^\alpha}\right)^\beta = a^\alpha \cdot b^\alpha = ab^\alpha$$

5. formel. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ d. i. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{a^{\frac{\alpha}{\beta}}}{b^{\frac{\alpha}{\beta}}}$

d. h. $\sqrt[\beta]{\left(\frac{a^\alpha}{b^\alpha}\right)} = \sqrt[\beta]{\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha}$. denn

$$\left(\frac{\sqrt[\beta]{a^\alpha}}{\sqrt[\beta]{b^\alpha}}\right)^\beta = \frac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha$$

6. formel $(a^m)^n = a^{mn}$ d. i. $\left(a^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{\frac{\gamma}{\delta}} = a^{\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}}$ d. h.

$$\left(\sqrt[\beta]{a^\alpha}\right)^{\frac{\gamma}{\delta}} = \sqrt[\beta\delta]{a^{\alpha\gamma}}$$ denn $$\left(\left(\sqrt[\beta]{a^\alpha}\right)^{\frac{\gamma}{\delta}}\right)^{\beta\delta} = \left(\sqrt[\beta]{a^\alpha}\right)^{\gamma\beta} = a^{\alpha\gamma}$$

Beweise zum Ohm

2 formel. $\sqrt[\beta]{a^\alpha}\cdot\sqrt[\delta]{a^\gamma}$ soll $= \sqrt[\beta\delta]{a^{\alpha\delta+\gamma\beta}}$ denn

$\sqrt[\beta]{a^\alpha} = \sqrt[\beta\delta]{a^{\alpha\delta}}$ und $\sqrt[\delta]{a^\gamma} = \sqrt[\beta\delta]{a^{\gamma\beta}} = \sqrt[\beta]{a^\alpha}\cdot\sqrt[\delta]{a^\gamma} = \sqrt[\beta\delta]{a^{\alpha\delta+\gamma\beta}}$

3 formel. soll $a^{\frac{\alpha}{\beta}} : a^{\frac{\gamma}{\delta}} = a^{\frac{\alpha\delta-\gamma\beta}{\beta\delta}}$ so muß

$\sqrt[\beta]{a^\alpha}:\sqrt[\delta]{a^\gamma} = \sqrt[\beta\delta]{a^{\alpha\delta-\gamma\beta}}$ denn

$\sqrt[\beta]{a^\alpha} = \sqrt[\beta\delta]{a^{\alpha\delta}}$ und $\sqrt[\delta]{a^\gamma} = \sqrt[\beta\delta]{a^{\gamma\beta}}$ daher der [illegible]

4 formel soll $(ab)^{\frac{\alpha}{\beta}} = a^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot b^{\frac{\alpha}{\beta}}$ so muß

$\sqrt[\beta]{ab^\alpha} = \sqrt[\beta]{a^\alpha}\cdot\sqrt[\beta]{b^\alpha}$ denn

$\sqrt[\beta]{a^\alpha}\cdot\sqrt[\beta]{b^\alpha} = \sqrt[\beta]{(a^\alpha\cdot b^\alpha)} = \sqrt[\beta]{(ab)^\alpha}$

5 formel soll $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{a^{\frac{\alpha}{\beta}}}{b^{\frac{\alpha}{\beta}}}$ so muß

$\sqrt[\beta]{\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha} = \frac{\sqrt[\beta]{a^\alpha}}{\sqrt[\beta]{b^\alpha}}$ denn $\frac{\sqrt[\beta]{a^\alpha}}{\sqrt[\beta]{b^\alpha}} = \sqrt[\beta]{\left(\frac{a^\alpha}{b^\alpha}\right)} = \sqrt[\beta]{\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha}$

6 formel soll $\left(a^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{\frac{\gamma}{\delta}} = a^{\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}}$ so muß

$\sqrt[\delta]{\left(\sqrt[\beta]{a^\alpha}\right)^\gamma} = \sqrt[\beta\delta]{a^{\alpha\gamma}}$ es ist aber $\sqrt[\delta]{\left(\sqrt[\beta]{a^\alpha}\right)^\gamma} = \sqrt[\delta]{\left(\sqrt[\beta]{a^{\alpha\gamma}}\right)} = \sqrt[\delta\beta]{a^{\alpha\gamma}}$

Z.B. $a^{\frac{8}{3}} = a^{2+\frac{2}{3}} = a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}$

Bei differenz Potenzen [illegible] $\alpha-\beta=\gamma-\delta$ so zu §73.

ist $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = \frac{a^\gamma}{a^\delta}$ denn $\left(\frac{a^\alpha}{a^\beta}\right)a^\delta = \frac{a^{\alpha+\delta}}{a^\beta}$ da nun

$\alpha-\beta=\gamma-\delta$ so ist

$\alpha+\delta=\gamma+\beta$ daher $\frac{a^{\alpha+\delta}}{a^\beta} = \frac{a^{\gamma+\beta}}{a^\beta} = \frac{a^\gamma\cdot a^\beta}{a^\beta} = a^\gamma$

16)

§ 74. Ob die formeln der ganzen Potenzen auch für Differenz Potenzzahlen gelten?

1. formell. $a^m \cdot a = a^{m+1}$ d.h.

$$a^{\alpha-\beta} \cdot a = a^{(\alpha-\beta)+1} \text{ oder } = a^{(\alpha+1)-\beta}$$

$$\frac{a^\alpha}{a^\beta} \cdot a = \frac{a^{\alpha+1}}{a^\beta} = \frac{a^\alpha \cdot a}{a^\beta}$$ [illegible]

ist II formel. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ d.h.

$$a^{\alpha-\beta} \cdot a^{\gamma-\delta} = a^{(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)}$$ d.h.

$$\frac{a^\alpha}{a^\beta} \cdot \frac{a^\gamma}{a^\delta} = a^{(\alpha-\beta)} \cdot a^{\gamma-\delta} = \frac{a^\alpha}{a^\beta} \cdot \frac{a^\gamma}{a^\delta}$$

$$\frac{a^{\alpha+\gamma}}{a^{\beta+\delta}} = \frac{a^{\alpha+\gamma}}{a^{\beta+\delta}}$$

III formel $a^m : a^n = a^{m-n}$ d.h.

$$a^{\alpha-\beta} : a^{\gamma-\delta} = a^{(\alpha-\beta)-(\gamma-\delta)}$$

$a^{(\alpha-\beta)-(\gamma-\delta)} \cdot a^{\gamma-\delta} =$ weil vom II dann $a^{\alpha-\beta}$

IV formel $(ab)^m = a^m \cdot b^m$ d.h.

$$(a.b)^{\alpha-\beta} = a^{\alpha-\beta} \cdot b^{\alpha-\beta}$$ d.h.

$$\frac{ab^\alpha}{ab^\beta} = \frac{a^\alpha}{a^\beta} \cdot \frac{b^\alpha}{b^\beta} = \frac{ab^\alpha}{ab^\beta}$$

V formel. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ d.h. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha-\beta} = \frac{a^{\alpha-\beta}}{b^{\alpha-\beta}}$ dann

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha-\beta} \cdot b^{\alpha-\beta} = \left(\frac{ab}{b}\right)^{\alpha-\beta} = a^{\alpha-\beta}$$

VI formel $(a^m)^n = a^{mn}$ d. h. $\left(a^{\alpha-\beta}\right)^{\gamma-\delta} = a^{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}$ oder $= a^{\alpha\gamma-\gamma\beta+\delta\beta-\alpha\delta}$

$= (\alpha\gamma-\gamma\beta)-(\alpha\delta-\delta\beta)$

$$\frac{\left(\frac{a^\alpha}{a^\beta}\right)^\gamma}{\left(\frac{a^\alpha}{a^\beta}\right)^\delta} = \frac{\frac{a^{\alpha\gamma}}{a^{\gamma\beta}}}{\frac{a^{\alpha\delta}}{a^{\beta\delta}}} = \frac{\left(\frac{a^\alpha}{a^\beta}\right)^\gamma}{\left(\frac{a^\alpha}{a^\beta}\right)^\delta}$$

so ist $a^1 = a^{m-(m-1)} = \frac{a^m}{\frac{a^m}{a}} = \frac{a^m \cdot a}{a^m} = a$ §75

$$a^0 = a^{\beta-\beta} = \frac{a^\beta}{a^\beta} = 1$$

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^m \cdot b^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{a^m}{b^n}$$

$$\frac{a^m \cdot b^{-n}}{c^p\, d^{-q}} = \frac{a^m \cdot d^q}{c^p \cdot b^n} = \frac{d^q}{a^{-m} \cdot c^p \cdot b^n}\ \frac{1}{d^{-q} \cdot a^{-m} \cdot c^p \cdot b^n}$$

10 frage $1^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{1^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{1} = 1$ §76

11 frage $0^m = 0$ wenn m ganzzahl ist ist $m = \frac{\alpha}{\beta}$

so ist $0^m = 0^{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt[\beta]{0^\alpha} = \sqrt[\beta]{0} = 0$ denn $0^\beta = 0$

ist m $\alpha-\beta$ so ist $0^m = 0^{\alpha-\beta} = \frac{0^\alpha}{0^\beta} = \frac{0}{0} = 0$

14 frage $(a+b)^m = a^m + b^m$ ist unrichtig denn

$(a+b)^m$ bedeutet $(a+b)(a+b)(a+b)\ldots\ldots$ m mal

und dies giebt so nicht $a^m + b^m$ denn dies enstünde

nur $(a+b)+(a+b)+(a+b)\ldots\ldots$ m mal

Com. Ob. W. M.

13) ferner $\sqrt[m]{a+b} = \sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b}$ ist unrichtig denn $(\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b})^m$ gibt nicht $a+b$

Capitel IV

§81 $562 \cdot 10000 = 5620000$ denn $562 = 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2$ also ($10000 = 10^4$ und)

$(5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2) 10^4 = 5 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 0$
$= 5620000$

$563453 : 10000 =$ ~~5634~~ $56 + \frac{3453}{10000}$ denn

$563453 = 56 \cdot 10000 + 3453$ daher

$\frac{563453}{10000} = \frac{56 \cdot 10000 + 3453}{10000} = 56 + \frac{3453}{10000}$

§85 $4798 \cdot 5 = \frac{4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 8}{5}$

$20 \cdot 10^3 + 35 \cdot 10^2 + 45 \cdot 10 + 40 =$

$2 \cdot 10 \cdot 10^3 + (3 \cdot 10 + 5) 10^2 + (4 \cdot 10 + 5) 10 + 4 \cdot 10 =$

$2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 10 =$

$2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + (5+4) 10^2 + (5+4) 10 =$

$2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 0 =$

23990

§86. $6798 : 5 = 5 / 6 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 8 / = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 9.$

5
$1 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 = 17 \cdot 10^2$
15
$2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 = 29 \cdot 10$
25
$= 4 \cdot 10 + 8$
48
45
3

Quot $= 1359 + \frac{3}{5}$

§ 91.

Soll zu den Zahlen 12, 15, 21, 16 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache gefunden werden so hat 12, 15, 21, 16 als factoren

3.4. 3.5 3.7 2.8

die Zahl muss also haben 3.4.5.7.2 als factoren

$= \frac{16}{15} \; \frac{80}{16} \; \frac{16}{240}$ $= 1680$ die Zahl selbst.

so ist $12/1680/140$. $15/1680/112$ $21/1680/80$. $16/1680/15$

§ 92.

630	2
315	5
63	3
21	7
3	3
1	

Primzahlen

§ 94.

Beispiel $6/22/3$, $\frac{18}{4}$ so ist 2 als gemeiner factor von 6 und 22 auch factor von 4.

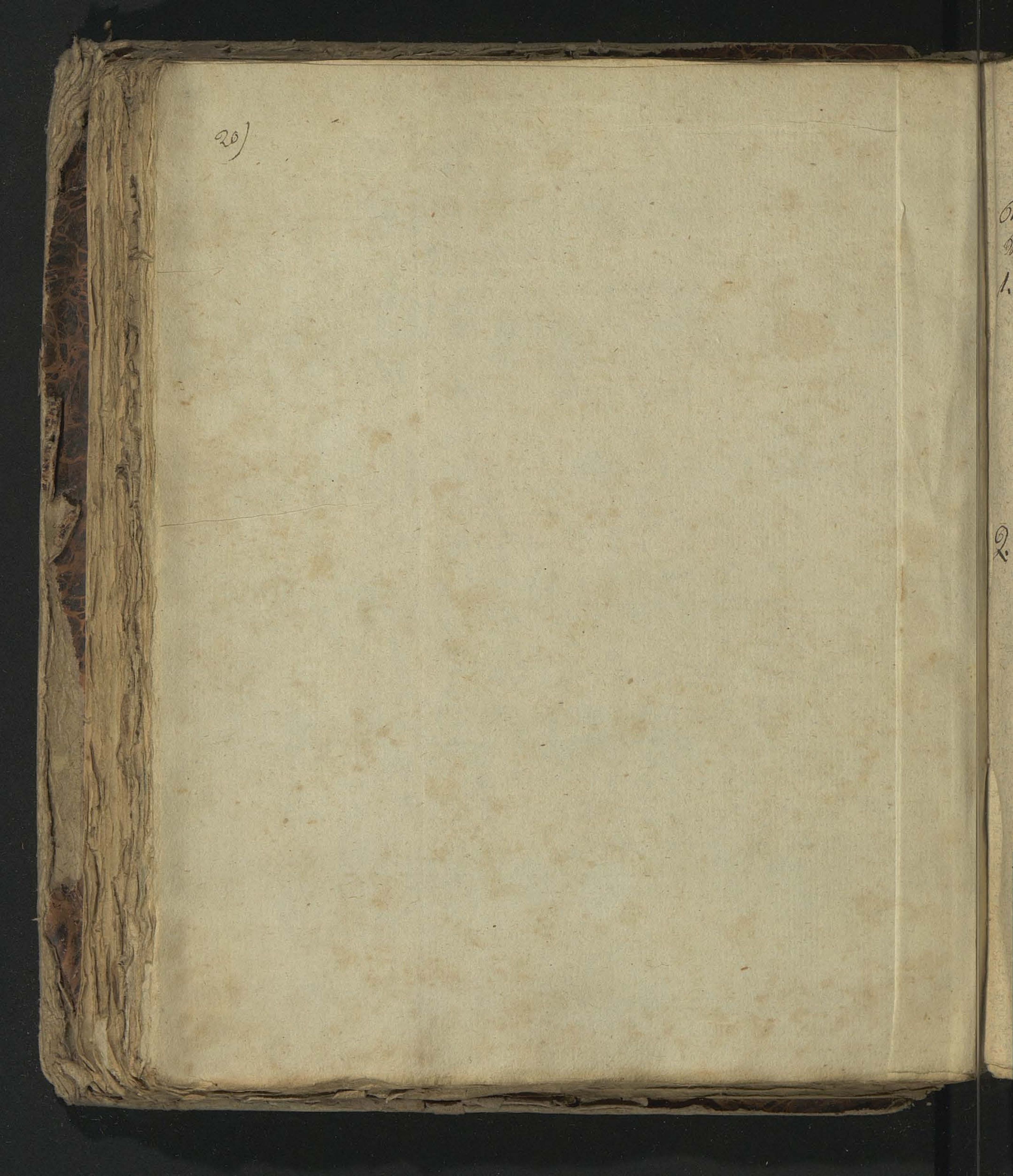
Denn $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$

$a = bq + r$

$a - bq = r$, $\frac{a-bq}{m} = \frac{r}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}q = \frac{r}{m}$

da nun $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$ ganze Zahlen sind so ist auch $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} \cdot q$ eine ganze Zahl folglich $\frac{r}{m}$ eine ganze Zahl.

nun $a - bq = r = \frac{a-bq}{n} = \frac{r}{n} = \frac{r}{n} + \frac{b}{n}q = \frac{a}{n}$ wo dasselbe wiederum gilt.



Zu Seite 2.

Selbsterfindung der aufgestellten Wurzelsätze.

1. Um den Ausdruck $\sqrt[b]{(a^b)}$ in einen andern zu verwandeln ~~giebt es 2 Wege. Der erste folgt unmittelbar aus der Erklärung einer Wurzel~~ so sehen wir daß (a^b) in b gleiche Factoren zerlegt werden soll und 1 Factor genommen. Es ist aber $(a^b) = a.a.a.a.$ b mal mithin $\sqrt[b]{(a^b)} = a$

Practische Regeln können überall entwickelt [?] werden.

2. Um den Ausdruck $\sqrt[m]{(ab)}$ in einen andern zu verwandeln, so sieht man daß ~~[illegible]~~ das Product ab auch auf diese Weise entsteht, wenn man a in m gleiche factoren zerlegt und b auch in m glei. fact. zerlegt. der eine factor von a heiße x, der von b, z, so wird ab auch xz, m mal genommen entstehen daher $xz = \sqrt[m]{(ab)}$ seyn und da $x = \sqrt[m]{a}$ und $z = \sqrt[m]{b}$ so ist $\sqrt[m]{(ab)} = \sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{b}$.

3.) Daß $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$ denn ein Bruch in m=factoren zerlegt, kann man einen Bruch zum factor haben das führt mich auf den Gedanken man müsse sowohl aus dem Zähler als aus dem Nenner Wurzel ausziehen, und ich wurde darin bestärkt, denn ist $x=\sqrt[m]{a}$ und $z=\sqrt[m]{b}$ so ist $\frac{a}{b}$ aus $\frac{x}{z}$ m mal genommen entstanden ist $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{x}{z} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$

4.) Daß $\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$ denn

$\sqrt[m]{(a^n)} = \sqrt[m]{(a.a.a.a. \text{ n mal})}$ = nach dem 2ten Satze $\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{a}\ldots$ n mal =

$=(\sqrt[m]{a})^n$

5.) Daß $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ wurde ich auf doppeltem Wege geführt. Der erste Weg ist der Weg der Vermuthung. Da ich nemlich wußte daß $(a^m)^n = a^{mn}$ und da das Radiciren [illegible]

Potentiation nutze ist, so verwende

ich doch $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ und ich werde

darin bestätigt den $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{mn}{n}} = a^m$

Zweitens ist die analysis (data

$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{(a.a.a \text{ n mal})} = \sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{a} \ldots$ n mal

benenne ich $\sqrt[m]{a} = x$ so ist $\sqrt[m]{a^n} = x.x.x.x \ldots$ n mal

Wird nun vorausgesetzt, weil sein

soll muss doch n ein Vielfaches

von m ist ~~[illegible]~~, so werden

ja m, x ein a geben und dieses

a wird so viele sein als m in

n enthalten ist oder ich werde

bekommen a ~~genommen~~ durch Multipl $\frac{n}{m}$ oder

$a^{\frac{n}{m}}$

6) Daß $\sqrt[m]{(a^n)} = \sqrt[m:n]{a}$ des vorher gezeigten

Weil ist $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ ist nun n in m, enthalten

r mal so ist $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{1}{r}}$ oder umgekehrt

$a^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{a}$ oder da $r = \frac{m}{n}$

$a^{\frac{1}{r}} = \sqrt[\frac{m}{n}]{a} = \sqrt[m]{a^n}$ .. ferner stützt sich

darauf die Wurzelziehung selbst.

denn $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{a} \ldots$ n mal

oder $x . x . x \ldots$ n mal

Wir betrachten nun erst dieses Product von x einmal, und sehen daß sobald n in m ohne Rest enthalten ist z. B. r mal, daß alle diese x multipl. die r^te Wurzel von a bilden. denn $a = x^m$ und da $\frac{m}{n} = r$ so ist ~~x^n in x^m~~ [illegible] x^m von x^n die r^te potenz d. h. $(x^n)^r = x^m = a$

also $x^n = \sqrt[r]{a} = \sqrt[\frac{m}{n}]{a}$

d. h. da $x^n = \sqrt[m]{a^n}$ $\quad \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[\frac{m}{n}]{a}$

7) $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a}\right)}$ ist deutlich denn $\sqrt[mn]{a}$ heißt ich soll a in mn gleiche factoren zerlegen. Zerlege ich nun a zu erst in m gleiche factoren so wird jeder factor [illegible] factor die m^te potenz [illegible] welche [illegible] factor zu finden muß ich diese m^te potenz [illegible] factor in n gleiche factoren zerlegen oder die $\sqrt[n]{}$ Wurzel ausziehen

darstellen ist ~~als~~ wenn ich a zu erst in m gleiche Fact. zerlege und dann jeden Factor in n gleiche Factoren zerlege.

8) $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{(a^n\cdot b^m)}$ ~~folgt daraus~~ ~~denn $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{m}}\cdot b^{\frac{1}{n}}$~~. eigentlich sollte der Satz umgekehrt gestellt werden weil man doch gewöhnlich einen gegebenen Ausdruck in einen einfachern verwandeln will

also $\sqrt[mn]{(a^n\cdot b^m)} = \sqrt[mn]{a^n}\cdot\sqrt[mn]{b^m} = a^{\frac{n}{mn}}\cdot b^{\frac{m}{mn}} =$

$= a^{\frac{1}{m}}\cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

oder

$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{m}}\cdot b^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{mn}}\cdot b^{\frac{m}{mn}} =$

$= \sqrt[mn]{a^n}\cdot\sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{(a^n\cdot b^m)}$

9) $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}}$ wird ebenso klar

10) $a\cdot\sqrt[n]{b} = a^{1}\cdot b^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b} =$

$= \sqrt[n]{(a^n\cdot b)}$

11) $\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{n}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a^n}{b}}$

12) $\frac{\sqrt[m]{a}}{b} = \frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{m}{m}}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b^m}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b^m}}$

Zur Seite 3

1) $(a^b)?a =$ d.h. ich soll den Logarithmen von a^b finden so daß a mit ihm potenzirt a^b giebt, dieser Log: ist b wie einleuchtend ist.

2) $a?(\sqrt[6]{a}) =$ d.h. ich soll den Log: von a finden, so daß $\sqrt[6]{a}$ damit potenzirt a giebt, dieser Log: ist 6 denn $(\sqrt[6]{a})^6 = a$.

3) $\sqrt[a?b]{a} =$ ~~ich [illegible] diesen Ausdruck [illegible] ausführlich $a?b$~~ d.h. ich soll diejenige Zahl finden welche mit $a?b$ potenzirt a giebt. Nun weiß mir aber $a?b$, daß b die Zahl ist, welche mit $a?b$ potenzirt a giebt mithin ist $\sqrt[a?b]{a} = b$

4) $(ab)?p =$ ~~[struck through]~~ $= ab$

Nach der Voraussetzung daß hier nur von absoluten Zahlen die Rede ist, ergiebt sich, daß ab aus lauter p bestehendes Product entsteht, und zwar aus x p dadurch zusammengesetzt wird so viel als der Logarithme $(ab?p)$ anzeigt. Nun ist aber ab ein Product, folglich besteht jeder factor aus Complexen einer Factoren von denen jeder p ist. Mithin ist x oder $(ab?p)$ eine Summe von $y+z$ wo y andeutet, aus wievielen p der eine factor a besteht, oder aus dem Logarithm von a unter der basis p, und z andeutet aus wievielen p, b besteht, oder den Logarithm von b aus der basis p andeutet d. h. $ab?p = a?p + b?p$

V. g.

5). ~~(a:b)~~ $\left(\frac{a}{b}\right)?p = a?p - b?p$.

Denn nach der bei 4) gedachten Voraussetzung ist $\frac{a}{b}$ eine ganze Zahl und bezeichnet so zeigen sie als der Logar. x oder $\left(\frac{a}{b}\right)?p$ andeutet. Es ist aber b in a ohne Rest enthalten müssen und sowohl b und zwischen der Anzahl der p als Product bestehen, als von a, und die Factoren von b müssten in den Factoren von a ~~[illegible]~~ enthalten und der Unterschied muss die Anzahl der Factoren p von $\frac{a}{b}$ sein. Mithin ist $\left(\frac{a}{b}\right)?p$ eine Differenz von y und z wo y die p von a, z die p von b andeutet, oder y der Log a bei der Basis p und Z der log. von b bei der Basis p vorgibt. d. h.

$$\left(\frac{a}{b}\right)?p = a?p - b?p.$$

---

6) $(a^b)?p = (a.a.a.a \ldots b\text{mal})?p$

$= a?p + a?p + a?p + a?p \ldots b\text{mal}$

$= (a?p)b$.

Differential und Integral Rechnung

1.

nach den Vorlesungen d. H. Ohm im Wintersem: 18$\frac{27}{28}$ 4mal wöchentl:

Einleitung

Die Quanta als den quantitativen ent-gegengesetzt sind der Gegenstand des arithm: Theils der Math:
Wir betrachten aber nicht nur die Zahl sondern nur das was Zahl selbst ist. erscheint an das Verhalten der Operationen zu verwenden, dies ist die Zahlenlehre oder Analysis.
Es giebt 7 Operationen. ist allgemeiner Wissenschaft ist analytisch, die sich in 2 Theile sondert, in die Analysis des Endlichen und die des Unendlichen, was Ursache ist. das Unendliche ist auch Gegenstand der Math: aber weil es unendlich ist. denn weiss man nicht wo die eine aufhört, die andere anfängt. die Analysis des Unendl-

oder die Diff: u. Integral Rechnung ist
nur der weiteren Anwendung des
Verhältnisses der 7 Operat: oder die
Analysis selbst.
Die Analysis des Endlichen in ihren
Elementen lehrt in der Theorie des
Gegensatzes in welchen die 4 ersten
Operat: stehen: in der Praxis, wie
man endliche Größen, Summen
Differenzen, Producte, Quotienten
paarweise addirt, subtrahirt, multiplicirt
und dividirt.

Die 0 ist nicht Nichts, die nicht
Nichts [illegible]
nicht, 0 ist der Repräsentant der
Diff. p−p.
Die +q und −q sind keine entgegen-
gesetzte Größen, sondern
sind bloß die Repräsentanten
der Summe 0+q oder der Diff 0−q.
Die Analysis hat eine Größe
zum Gegenstande, desto weniger
~~mit~~ entgegengesetzte Größen
der Begriff ist nur ein Quotienten
Imaginaire Größen gibt es nicht

Die höhere Analysis nimmt die 8 letzten
Operationen zur Verbindung, schaltet
ihre Zwischenglieder zu einander und
zu den 4 ersten Operationen, und giebt
in der praxis, Regeln wie man
einzelne Ausdrücke, Summen, Diff: Pro-
ducte. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen
summirt, addirt, subtr: multi: divid:
potenzirt, radicirt, logarithmirt.
Wie die unbenannte Zahl zur benannten
wird ist die Reihe der Größenlehre.
Aus der Diff: $a-b$ entspringen neue Erweiterung:
formen bekannt unter der Zahl 0, und
der negativen ganzen Zahl.
Die Theorie zeigt daß ich nie mit 0 di-
vidiren können, und dieser Fall muß
stets als besonderer gelten. Eine
Ausnahme von der allg: Größenlehre
bei Potenzen muß man die Begriffe
der ganzen, gebrochenen und negativen
Potenzen, bis man einen allg: Begriff
jeder allg: Potenz a^b entwickelt hat.

den weil für ganze Potenzen gilt
braucht ja nicht für jede Potenz
gelten. Dadurch fallen alle
Paradoxien des Calculs, rab.
Die Differenzpotenz enthält die ganze, die
Null, die negative ganze Potenz in sich, und
eine Diff: Potenz $A^{a-b} = \frac{A^a}{A^b}$
Noch allgemeinerer Begriff der Potenz
A^b würde der sein, wenn $b = \frac{a-b}{c-d}$ der
der jede 5 Fälle enthalten. ganze Zahl,
0 negative Zahl, gebrochene ganze und
gebrochene negative Zahl. Aber da dieser
Fall wenig gebraucht wird, definiren
wir solche Potenz nicht.
Ist a eine absolute Zahl so erhält $\sqrt[m]{a}$ einen
Werth und zwar nur einen einzigen
Daher fallen irrationale Zahlen weg,
denn $\sqrt{2/5}$ hat einen völlig bestimmten
Werth nur daß dies ein Bruch ist,
dessen Zähler und Nenner aus unendlich
vielen Ziffern besteht.
Die Aufgabe, eine gegebene unrichtige
Gleichung in eine richtige zu ver-
wandeln, zu lösen ist das Geschäft der
Algebra.

Eine Gleichung ist nur identisch. alle an: S. anderweitigen Gleichungen, als Aufgaben der Algebra sind die Bestimmungsgleichungen.
Bei der Lösung der quadratischen Gleichungen ergiebt sich, daß es zwei Ausdrücke giebt, die einer quadr. Gl. genügen. dies führt dazu die Quadrat√ allgemeiner aufzufassen, und darunter nicht mehr den absoluten Werth zu denken sondern beide Werthe (+) und (−).
Ferner fließt daraus daß die Gl: $x^2 + a = 0$ nicht aufgelöst werden kann. d.h. daß es keinen Werth giebt der der Gl. genügt. dies führt nun darauf den Begriff der Quadratwurzel noch mehr zu verallgemeinern nehmlich zu bestimmen was $\sqrt{a}$ ist, wenn a alles mögliche ist. daher auch eine negative Zahl. Dadurch treten die imaginairen Größen auf.
Ich werde also, wenn auch $b.b = b^2$ nicht setzen $\sqrt{a}.\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2$, bis ich nicht überzeugt werde daß beide Factoren ein und dasselbe bedeuten.

6. die $\sqrt[m]{a}$ ist mehrdeutig und hier ist also die Vorsicht nöthig.
Alle Imaginaeren höheren Wurzeln lassen sich auch die imagin: quadrat Wurzel zurückführen. und das Eigentümliche der Potenz ist auch in dieser Hinsicht aufzustellen. Wir begnügen uns mit Potenzen deren Exponent $a-b$ ist. und dadurch ist das Potenziren nicht erschöpft. Es ist einleuchtend weil man in a^x das x alles sein kann

Differential Rechnung.

Wollen wir die 4 ersten Operationen erschöpfen, so erschöpfen wir es durch unendliche Reihen. dann der wird ins unendliche die Operationen angewandt. und gerade die unendlichen Reihen zu betrachten, das zu behandeln was allen solchen Reihen zukommt, ist die Sache der Diff: Rechnung.
Man kann sich fragen auf welchem Wege man zu den unendlichen Reihen gelangt. um sie zu erst entstehen.

zu welcher sich das Integral verhält wie die Div: zu Mult.

Sie entstehen zunächst bei Dividiren. 7.
Wenn ich z. B. 1 durch 1+x dividire, und
zwar als Zahlzeichen dividire, wobei ich
im praktischen das Zeichen in ein anderes
umgewandelt haben will, das dasselbe bedeu-
tet. Dieser Wunsch giebt zwar eine unbe-
Aufgabe, denn es giebt unzählige
Formen, die dem einen gegebenen
identisch sind. Welche von diesen
unendlichen Formen will man denn
haben. Im prakt: operiren, will man
ein Zeichen haben, das eine Summe
ist nach dekadischem Systeme geord-
net, und dadurch wird die Aufgabe
bestimmt. In der gemeinen Buchstaben
berechnung findet solche Bedingung
nicht statt.

Wenn ich also 1 durch 1+x zu dividiren habe so
giebt das $\frac{1}{1+x}$. Aus diesem Quot: kann man
nun andere Form verlangen die dasselbe
bedeutet. Diese Aufgabe ist diophantisch.
Im praktischen Arbeiten will man gewöhnlich
Ausdrücke, die als algebr: Summen betrachtet
werden.

8. Will ich nun $\frac{1}{1+x}$ in eine Summe der alg. verwandeln, stelle ich folgenden Lehrsatz auf.

Die allg. Form des Quot. $\frac{A}{B} = x + \frac{A-Bx}{B}$

Die Richtigkeit der Gl. ergiebt sich wenn man [illegible] und beides durch B multiplizirt.
Es ist die allg. Norm einen Quotienten in eine Summe zu verwandeln.
Nach [illegible] in Alg. ergiebt sich, daß nach diesem Lehrsatz zum Resultat zu unendlichen Summen führt, die alle dem Quot. $\frac{A}{B}$ = sind. indem ich statt x unendlich verschiedenes nehmen kann. Die Anwendung wird nun statt x den höchsten Theil der höchsten Ordn. und dieses giebt das gemeine Dividiren.
Wenden wir diesen Lehrsatz auf unsere Aufgabe $\frac{1}{1+x}$ in eine Summe zu verwandeln. Statt x kann ich verschiedenes nehmen ich nehme 1. der Einfachheit wegen so wird

$$\frac{1}{1+z} = 1 + \frac{1-(1+z)1}{1+z}$$

$$\frac{1-(1+z)1}{1+z} = -\frac{z}{1+z} \quad \text{also} \quad \frac{1}{1+z} = 1 - \frac{z}{1+z}$$

$$\frac{z}{1+z} = z + \frac{z-(1+z)z}{1+z} = z - \frac{z^2}{1+z}$$

also $\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + \dfrac{z^2}{1+z}$

Man wird so fortfahren können mit immer Summen von mehr Summanden zu den unendlichen Summanden, nämlich

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \ldots\ldots$$

Da geht das Ding nicht ins Unendliche sondern nur so weit, wie wir Lust haben wobei ich die Absicht habe, d.h. ich noch immer einen neuen Summanten bekommen kann. Da ist unendliche Reihe, und eine Andeutung, dem solche existiren zwar nicht wie es aus dem Beispiel deutlich ist. Denn ich kann zwar verschiedene Anzahl von Summanden haben, aber eine gewisse Anzahl von Summanten müssten wir doch haben.

Das Begriffliche daß ich sie nie unendlich machen kann, ersieht man aus dem Begriffe einer unendl. Reihe, ohne daß sie selbst existirt

Da ist $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \frac{z^6}{1+z}$

Denke ich mir statt $z = \frac{1}{10}$ so wird $\frac{1}{11} = 1 - \frac{1}{10} +$
$+ \frac{1}{100} - \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} - \frac{1}{100000} \ldots + \frac{\frac{1}{1000000}}{1+\frac{1}{10}}$

In der Anwendung wird gewöhnlich das letzte Glied weggelassen. In der Weglassung muß man aber das beurtheilen können was man weglässt, und zu wissen wie groß der Fehler ist, den man begehen. In der Anwendung bekümmere ich mich um das nicht, und denke mir eine Reihe die nach dem bekannten Gesetze fortgeht ohne Bestimmung der Begriff des Gliedes, um in der Anwendung jeden Begriff nehmen zu können.

Die Gleichung

$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 \ldots\ldots$

ist falsch, denn wo ich aufhören muß ich das letzte Glied, das ein Bruch ist, nehmen. Diese Gleichung führt auch die unrichtigen Resultate

10.

als ob $\frac{1}{2} = 1-1+1-1+1-1+1 \ldots\ldots$ wäre

das wird Niemand glauben, und doch ergiebt sich das wenn man statt z, 1 setzt.

als ob $\frac{1}{3} = 1-2+4-8+16-32+64 \ldots\ldots$ wäre

was sich ergiebt wenn z = 2 ist.

Die Richtigkeit ist nur dann wenn ich bei gewissen Gliedern stehen bleibe, welche ich betrachte und dann das letzte Glied hinzufüge z. B. $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1-1+1-1+1-\left(\frac{1}{1+1}\right) = \frac{1}{2}$

$= 1-1+1-1+1-1+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} = 1-2+4-8+16-32+64-\frac{128}{1+2} =$ die Tabellen der Algebra: 85; $42+\frac{128}{3} = 42+42+\frac{2}{3}$
$= 84+\frac{2}{3}$

Gehen wir zum Multipliziren um die unendlichen Reihen entstehen; | also $85-\left(84+\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$

Multiplizire ich $(1+b)$ mit sich selbst immer fort, so bekomme ich wieder eine ähnliche Reihe, wenn ich mit $(1+b)$ ohne Ende multiplizire: diese kann ich wieder nur in der Idee unendlich setzen.

$$\begin{array}{r} 1+b \\ 1+b \\ \hline b+b^2+1+b \end{array} = \begin{array}{r} 1+2b+b^2 \\ 1+b \\ \hline b+2b^2+b^3+1+2b+b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1+3b+3b^2+b^3 \\ 1+b \\ \hline b+3b^2+3b^3+b^4 \\ 1+3b+3b^2+b^3 \\ \hline 1+4b+6b^2+4b^3+b^4 \end{array} \text{ u. s. f.}$$

Ü. Denke ich mir $(1+b)$ x mal miteinander multiplic., wobei x eine absol. Zahl bedeutet, denn nur solche giebt einen Sinn, so bekomme ich folgende Reihe

$$(1+b)^x = 1 + x.b + \frac{x(x-1)}{2}.b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}b^3 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{2.3.4}.b^4 + \ldots\ldots$$

bis ich zu einem Gliede komme, wo nur b^x vorkommt.

Ob die Gl. für x gilt, wenn x irgend etwas ist, wissen wir nicht. Sie gilt nur wenn x absolute ganze Zahl ist. Es ist der binom. Satz.

Will ich wissen ob $(1+b)^y$ dasselbe giebt wenn $y = -x$. In diesem Falle ist $(1+b)^y = \frac{1}{(1+b)^x} =$ durch die Reihe die Divis. verrichtet, wenn man bei einem Gliede aufhört, und den letzten Glied mitnehmen, bekomme ich:

$$(1+b)^y = 1 + y.b + \frac{y(y-1)}{2}.b^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{2.3}b^3 + \ldots$$

wo ich voraussetze daß ich fortgehen kann so weit ich will über den letzten Glied

annehmen müßte. ~~weil~~ auch $y = -x$ 13.
Nun solche Reihen existiren in der
Natur, allein überhaupt sind solche
existiren also nicht in der Natur,
sind daher unbrauchbar.
Wir sehen daß $(1+b)^x$ mag x positiv
oder negativ sein dieselbe Reihe
giebt. Daraus erhellt.
1. Ist x positive ganze Zahl (z. B. 4) dann
kann ich mir die Reihe ins unendliche
denken, denn wo der factor $x-4$
also $(4-4)$ vorkommt, wird das Glied 0
~~wird~~ und alle folgenden auch 0.
Es ist daher einerlei ob ich mir die Glieder
bis unendliche angehängt denke
oder nicht.
2. Ist x negativ, als dann kann ich mir
die Reihe ebenfalls ins unendliche
denken, wenn ich dieses nur in dem
oben angezeigten Sinn fasse, nemlich
eine Reihe von unbestimmter Anzahl
Glieder, wo aber das letzte Glied,
~~wo~~ ich auch aufhören mag, mit
anzuheftenden oder wenigstens

14 mitzugedacht sein muss.

3.) In der Anwendung muss das letzte Glied weggelassen werden, wobei das Glied wo man aufhört, so weit gewählt sein muss, damit das letzte Glied, welches um ganz noch kleiner ist, bei der Richtigkeit unserer Arbeit, als Versehen und Unvollkommenheit betrachtet werden kann.

4.) Aus der Potenz $(1+b)^y$, wenn $y=-x$ müsste sich eine Reihe entwickeln, die der aus $(1+b)^x$ entwickelten identisch wird, denn:

$(1+b)^y = \frac{1}{(1+b)^x}$ (wenn $y=-x$) und

$\frac{1}{(1+b)^x}$ wenn ich die Divis. wirklich verrichte gibt $1+(-xb)+\frac{(-x)(-x-1)}{2}b^2+\frac{(-x)(-x-1)(-x-2)}{2\cdot3\cdot}b^3$

also $= 1+yb+\frac{y(y-1)}{2}b^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{2\cdot3\cdot}b^3$

u. s. f. zu gedenken sein.

Praktische Aufstiegen. 15.

$1+z \,|\, 1 \,|\, 1 - z + z^2 - - -$

$1+z$

$-z$

$-z - z^2$

$+z^2$

$z^2 + z^3$

$-z^3$

$\frac{30}{5} = 8 + \frac{70-40}{5}$

ich könnte auch so dividiren $1+z \,|\, 1 \,|\, 1-1+1-1$

$1+z$

$-z$

$-1-z$

1

$1+z$

$-z$

$-1-z$

1

daher ist. $1-1+1-1+\frac{1}{1+z} = 1-z+z^2-\frac{z^3}{1+z}$

$\frac{1}{1+z} = \frac{1+z-z-z^2+z^2+z^3-z^3}{1+z} = \frac{1}{1+z}$

$1+4b+6b^2+4b^3+b^4$

$1+b$

$b+4b^2+6b^3+4b^4+b^5$

$1+4b+6b^2+4b^3+b^4$

$1+5b+10b^2+10b^3+5b^4+b^5$

$1+b$

$1+b$

$b+b^2$

$1+b$

$1+2b+b^2$

$1+b$

$b+2b^2+b^3$

$1+2b+b^2$

$1+3b+3b^2+b^3$

$1+b$

$b+3b^2+3b^3+b^4$

$1+3b+3b^2+b^3$

$1+4b+6b^2+4b^3+b^4$

Der binomische Satz ist wesentlich der Satz: $(a+b)^x =$

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline ab+b^2 \\ a^2+ab \\ \hline a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^2b+2ab^2+b^3 \\ a^3+2a^2b+ab^2 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

Es heisst eine quadrat Potenz eines Binomi und ist gleich den Variationen zu zwei mit Wiederholung.
Die dritte Potenz ist gleich den Variationen zu drei mit Wiederholung. Folgl. die m^te Potenz ist gleich den Variationen zu m mit Wiederholung. Demnach wird es von a und b folgende Ausdrücke geben.

$a^m, a^{m-1}.b, a^{m-2}.b^2, a^{m-3}.b^3 \ldots b$

Es kommt nun noch darauf an die Coefficienten zu diesen Ausdrücken zu bestimmen. Die Ausdrücke a^m und b^m können nur einmal vorkommen, haben also zu Coeff. 1. Bei den übrigen Ausdrücken aber wird die Permutationszahl der Coefficient seyn.

Nach dem bekannten Gesetze der 17. Permutationen wird also $a^{m-1}b$ d.h. wo a (m-1)mal vorkommt und b nur einmal, zum Coefficienten haben

$$\frac{1.2.3.4 \ldots\ldots (m-2)(m-1)m}{1.2.3.4 \ldots (m-2)(m-1)} = m$$

und $a^{m-2}.b^2$ zu Coefficienten haben

$$\frac{1.2.3.4 \ldots\ldots (m-2)(m-1)m}{1.2.3.4 \ldots\ldots (m-2).\ 1.2} = \frac{m(m-1)}{2}$$

und $a^{m-3}.b^3$ zu Coeff. haben

$$\frac{1.2.3.4 \ldots\ldots (m-3)(m-2)(m-1)m}{1.2.3.4 \ldots (m-3).\ 1.2.3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$

u.s.f. Hieraus entspringt die Wahrheit, daß

$$(1+b)^x = 1 + xb + \frac{x(x-1)}{2}b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}b^3 + \ldots\ldots b^x$$

sobald ich $x = m$ und $a = 1$ setze.

Wir wollen nun sehen ob $\frac{1}{(1+b)^x}$ dieselbe Reihe giebt.

18 Es ist nämlich, wenn $y = -x$ ist

$$(1+b)^y = (1+b)^{-x} = \frac{1}{(1+b)^x} =$$

$$= \frac{1}{1 + xb + \frac{x(x-1)}{2}b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}b^3 \ldots b^x}$$

$$1 + xb + \frac{x(x-1)}{2}b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}b^3 \ldots b^x \;\Big|\; 1 \;\Big|\; 1 - xb$$

$$1 + xb + \frac{x(x-1)}{2}b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}b^3 \ldots b^x$$

$$-xb - \frac{x(x-1)}{2}b^2 - \frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}b^3 \ldots b^x$$

$$-xb - x^2b^2 - \frac{x^2(x-1)}{2}b^3 - \frac{x^2(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}b^4 \ldots$$

der Rest. $\frac{-x(x-1)b^2 + 2x^2b^2 + x^2(x-1)b^3}{2} - \frac{x(x-1)(x-2)b^3 + x^2(x-1)(x-2)b^4}{2\cdot 3} \ldots$

oder $-x$.

geht nicht weiter.

Wollen wir die Division $\frac{1}{1+xb+\frac{x(x-1)}{2}b^2+\dots} = \frac{A}{B}$ nach dem Satze $\frac{A}{B} = Z + \frac{A-BZ}{B}$ verrichten so wird der vorgezeigte Quotient Q genannt.

$$Q = \underline{1} + \frac{1-1-xb-\frac{x(x-1)}{2}b^2-\frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}b^3 \dots = A}{1+xb+\frac{x(x-1)}{2}b^2+\dots\dots = B}$$ der Bruch sei P so wird

$$P = \underline{-xb} + \frac{-xb-\frac{x(x-1)}{2}b^2-\frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}b^3\dots + xb + x^2b^2 + \frac{x^2(x-1)}{2}b^3 + \frac{x^2(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}b^4\dots}{1+xb+\frac{x(x-1)}{2}b^2+\dots\dots}$$

geht auch nicht weiter. Cf. No 41

$$\frac{1}{1+xb+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\cdot b^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}b^2\dots\quad b^x} = 1 + \frac{-xb-\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}b^2\dots b^x}{1+xb+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}b^2\dots b^x}$$

$$\frac{-xb-\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}b^2-\dots b^x}{1+xb+\dots\dots b^x} = xb + \frac{-xb-\frac{x(x-1)}{2}b^2\dots b^x - xb\left(-xb-\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}b^2\dots b^x\right)}{1+xb+\dots\dots b^x}$$

$$\frac{(1-xb)\left(-xb-\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}b^2\dots b^x\right)}{}$$

$$\frac{x\cdot(x-1)\cdot b^2}{1\cdot 2} + \frac{(\;\;)-(\;-1+)\frac{x(x-1)\cdot b^2}{1\cdot 2}\dots b^x}{1\dots\dots xb} = \left(1-\frac{x(x-1)b^2}{1\cdot 2}\right)(1-xb)$$

Die Division auf beyde Arten
ist sehr vergeblich. daß aber

$$\frac{1}{(1+b)^x} = 1 - xb - \frac{x(-x-1)}{2}b^2 - \frac{x(-x-1)(-x-2)}{2\cdot 3}b^3 - -$$

ergiebt sich schon daraus, wenn
man $x = 1$ setzen. denn ist

$$\frac{1}{(1+b)^x} = \frac{1}{1+b} = 1 - b + b^2 - b^3 + b^4 - - - -$$

welches auch $1 - xb - \frac{x(-x-1)}{2}b^2 - - -$
giebt sobald man $x = 1$ setzt

denn $-xb = -b$

$$\frac{-x(-x-1)}{2}b^2 = \frac{-1(-2)b^2}{2} = -1(-1)b^2 = b^2$$

$$\frac{-x(-x-1)(-x-2)}{2\cdot 3}b^3 = \frac{-1(-2)(-3)b^3}{2\cdot 3} = \frac{-1(6)}{6}b^3 = -b^3$$

u. s. f.

Stelle ich die 4 Resultate der 4 Operationen A.
$a+b$, $a-b$, ab, $\frac{a}{b}$ und verbinde
den Ausdruck c mit jedem der 4 Ausdrü-
cke wieder auf eine Art, so bekomme
ich wiederum unendliche Reihen, dividire
wenn ich c mit $a+b$, oder mit $a-c$
divire, und die Quotienten $\frac{c}{a+b}$ und $\frac{c}{a-b}$
in eine Summe verwandeln will.
In diesem Falle entstehen unendl. Reihen
Soll ich $\frac{a}{b}$ in eine Summe verwandeln
so muss $\frac{a}{b} = x + z$ seyn, diese Gl: iden-
tisch gemacht giebt statt z, $\frac{A-Bx}{B}$ also
wird $\frac{a}{b} = x + \frac{A-Bx}{B}$, welches eine
identische Gl: ist. Weil die Gl:

$$\frac{A}{B} = x + z$$ in

$$A = Bx + Bz$$ diese in

$$A - Bx = Bz$$ diese in

$$\frac{A-Bx}{B} = z$$ verwandelt

wird identisch wenn die letzte ident.
wird, und diese wird id. sobald ich
statt z, $\frac{A-Bx}{B}$ setze.

22. Darum ist $\frac{c}{a+b}$ in Summe zu verwandeln.

$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} + \frac{c - \frac{c}{a}(a+b)}{a+b}$ ich nehme zum 1ten Summanden $\frac{c}{a}$ der zweite ist dann $\frac{c}{a} + \frac{\frac{-bc}{a}}{a+b}$

$= \frac{c}{a} + \frac{\frac{ac-ac-bc}{a}}{a+b}$ jetzt $\frac{\frac{-bc}{a}}{a+b}$ in Summe zu zu nehmen

$= \frac{c}{a} + \frac{\frac{-bc}{a}}{a+b}$ $\qquad \frac{-bc}{a^2}$ genommen giebt $\frac{-bc}{a^2} + \frac{\frac{bc}{a^2}}{a+b}$ dies

substituirt giebt $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} + \left(\frac{-bc}{a^2}\right) + \frac{\frac{bc}{a^2}}{a+b}$

Ich könnte es etwas bequemer machen

$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{b}{a}}$ setzen und verwandeln

$\frac{1}{1+\frac{b}{a}}$ nach der Form: $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 \dots$

$\dots \pm z^n \mp \frac{z^{n+1}}{1+z}$

und erhielte dieselben. Nehmlich

$z = \frac{b}{a}$ also $\frac{1}{1+\frac{b}{a}} = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{1+\frac{b}{a}}$

dieses in die Gleichung

$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{b}{a}}$ · substituirt gerade

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{cb^2}{a^3} - \frac{cb^3}{a^4} + \frac{cb^4}{a+b}$$

wenn wir die Reihe bei diesem Gliede schließen wollen

Wir haben dieses aufgestellt, um den Begriff der unendl. Reihen zu fassen, wie sie entstehen, und daß sie nur deshalb unendlich sind, daß ich den Quotienten unendlich fortsetzen kann

Dividire ich nun 1 durch eine dieser von so vielen Summanden wie ich will bekomme ich immer dasselbe, d. h. ein ähnliches.

Dividire ich 1 durch eine Summe von zwei vielen Summanden z. B.

$$\frac{1}{1 + xb + \frac{x(x-1)}{2} \cdot b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3} b^3 \ldots\ldots}$$ und so fort

bis ein Glied 0 wird, und es wird weil x absolut ist. So bekomme ich

$$1 + (-x)b + \frac{(-x)(-x-1)}{2} \cdot b^2 + \frac{(-x)(-x-1)(-x-2)}{2 \cdot 3} \cdot b^3 + \ldots\ldots$$

und wo ich aufhören kann ein letztes Glied hinzu

24. welches nun neue unendliche Reihe giebt, in dem selben Sinne, den wir von unendl. Reihen aufgestellt haben.

Die Reihe des obigen Bruches ist gleich

$(1+b)^x$ der Nenn. also $= \frac{1}{(1+b)^x}$ und das ist $= (1+b)^{-x}$, welches ist $(1+b)^{-x}$ gleich der neuen unendl. Reihe, das ist der bin. Lehrs. für negative Expon.

$x(x-1)(x-2)$
x^2-x
$x-2$
$3x^2-2x$

II. Fortsetzung

Es gilt also $(1+b)^x = 1+xb+\frac{x(x-1)}{2}b^2 \ldots$ für x, wenn x durch ganze Zahlen ist.

Ich kann nun die Multipl. verrichten und bekommen

$$(1+b)^x = 1+xb+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)b^2+\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right)b^3 \ldots$$

nehmen wir überall die Glieder heraus, die mit x multipl. sind, so bekommen wir

$$(1+b)^x = 1+\left|\begin{matrix} b \\ -\frac{1}{2}b^2 \\ +\frac{1}{3}b^3 \\ -\frac{1}{4}b^4 \\ \vdots \end{matrix}\right| x$$

das in Klammern geht nach bestimmtem Gesetz ins unendliche fort

Ist nämlich $x=0$ dann ist $(1+b)^0=1$ und ersteres bekommt ich auch 1. weil alle übrigen Glieder $=0$ werden wenn $x=0$ ist.

Auch eben dieser Art kann ich alle 25.
Glieder sammeln die mit x^2 afficirt
sind, die mit x^3 afficirt sind u. s. f.
so daß ich folgendes erhalte

$$(1+b)^x = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 \ldots$$

Bei einer solchen Reihe ist solche Beziehung der Coeff: nöthig, die sonst den 24 Lehrsatz nicht anwenden würden.

und eine Reihe die nach Potenzen
von b fortläuft, ist umgewandelt
in eine, die nach Potz von x fortläuft.
wo die Coeff: selbst unendl. Reihen
sind, die nach Potenzen von b fortlauf.
Da wo ich die Coeff: Reihen abbreche
kommt das Ergänzungsglied dazu. cf. der Abhandlung zum II Lehrsatz.
Ist (1+b) durch a vorgestellt, so wird
$(b = a-1)$, $a^x = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \ldots$
wo in den Coeff: statt b, (a−1) zu setzen
ist. und so verwandelten Reihen die
nach Potenzen von (a−1) laufen.
Jetzt fragt sich die Coeff: zu bestimmen.
Der Coeff A_1 lässt sich leicht bestimmen, weil man ihn leicht
und wie wollen die übrigen finden ausgedrückt durch
an A_1 ausgedrückt, was [illegible].

26. Die alle Coeff. also auch A_1 von a abhängig sind.

NB. Alles dies gilt wenn x eine Diff. ganze Zahl = ist.

Setze ich $x = y$. so bekomme ich

$a^y = 1 + A_1 y + A_2 y^2 \ldots$ die Coeff. bleiben dieselben, weil sie von x unabhängig sind.

Setze ich statt $x = x+y$, so bekomme ich $a^{x+y} = 1 + A_1(x+y) + A_2(x+y)^2 + \ldots$

Nach dem Satze $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

Setze ich nun statt a^x, a^y, a^{x+y}, die unendl. Reihen, so verwandelt sich der Satz der Potenz. in einen Satz der unendl. Reihen, welcher zweierlei [illegible]. Denn wenn ich die die Reihen von a^x und a^y mit einander multiplicire und das Product nach Potenzen von x ordne, während seine Coeff. unendl. Reihen

nach Potenzen von y geordnet sein 27.
müssten, und macht ich die Reihe für
a^{x+y} nach dieselbe Art ordnen, so
müssten die zwei Reihen = sein, und
da beyde nach Potenzen v. x geordnet
sind, so müssten ihre Coeff zusammen
der Reihe nach gleich sein. und ich
bekomme auf diese Art unendlich viele
Gleichungen zwischen y und die Coeff bestim
sich daraus bestimmend.

und es wird $A_2 = \frac{(A_1)^2}{1.2}$ | $A_3 = \frac{(A_1)^3}{1.2.3}$

$A_4 = \frac{(A_1)^4}{1.2.3.4.}$ u. s. f. Cf. die Nachträge zur II und III Vorlesung

Ebendeshalb daher die Gl. $a^x = 1 + A_1 x + \frac{A_1^2 x^2}{2!} + \frac{A_1^3 x^3}{3!} + \frac{A_1^4 x^4}{4!} + \dots$

wo $A_1 = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)^4 + \dots$

wo überall ein Ergänzungsglied, das
auch unbekannt ist, zu denken ist.
A_1 ist demnach von a abhängig, d. h. A_1
ist eine function von a. Eben so kann
ich sagen a ist funct von A_1 weil wechselseitig
ist. Denn die Abhängigkeit ist nicht einsei-
tig. Ich kann nun dem a verschiedene Werthe geben
und darnach A_1 berechnen, und umgekehrt.

Anmerkung zur II Vorlesung.

Bei der Abhandlung der Koeff. schienen als wenn das letzte Glied verschwinden würde. Wir wollen dies bei speziellen Beispiele betrachten, und zwar bei der

Reihe von der Form $(1+b)^x = 1+xb+\frac{x(x-1)}{2}b^2+\dots$

$$(1+b)^{-4} = 1-4b-\frac{4(-4-1)}{2}b^2-\frac{4(-4-2)}{2\cdot 3}b^3-\frac{4(-4-3)}{2\cdot 3\cdot 4}b^4-\frac{4(-4-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}b^5-\dots$$

$$=1-4b+\frac{20}{2}b^2+\frac{24}{2\cdot 3}b^3+\frac{28}{24}b^4+\frac{32}{120}b^5\dots$$

Dieses ergibt schon ein Ende und muss ohne Ende gehen da $(1+b)^{-4}=\frac{1}{(1+b)^4}$ und dieses eine unendliche Reihe gibt

das Beispiel ist eigentlich so:

$$(1+b)^{-4} = 1-4b-\frac{4(-4-1)}{2}b^2-\frac{4(-4-1)(-4-2)}{2\cdot 3}b^3-\frac{4(-4-1)(-4-2)(-4-3)}{2\cdot 3\cdot 4}b^4-\frac{4(-4-1)(-4-2)(-4-3)(-4-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}b^5$$

oder $=1-4b+10b^2-20b^3+35b^4-56b^5+$

Wir sehen daraus, dass wir bei einem solchen Glieder nicht aufhören können

man sieht die Nothwendigkeit eines 29. Supplement Gliedes; es ist nun die Frage, wie solches sich aus der gegebenen Reihe findet!

$$(1+b)^x = 1 + xb + \frac{x(x-1)}{2}b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}b^3 + \dots$$

hier braucht das Suplement Glied nicht hinzukommen, weil wenn x absolut ist, ein Glied 0 wird ~~also auch in~~

~~$(1+b)^x = 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 \dots$~~

~~[illegible] die Glieder [illegible] und die Reihe der Coeff. [illegible] [illegible] = [illegible] Glieder = 0 wird.~~

In der Reihe $(1+b)^{-x} = 1 - xb - \frac{x(-x-1)}{2}b^2 - \frac{x(-x-1)(-x-2)}{2\cdot 3}b^3 \dots$

ist das Suplement Glied, wenn ich beim 4. stehen will $\frac{-x(-x-1)(-x-2)(-x-3)}{2\cdot 3\cdot 4}\frac{b^4}{(1+b)^x}$

welches sich ergiebt wenn ich $x=1$ setze. Ich habe oben ein analogisches aus dem Reihen $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \frac{z^4}{1+z}$ gefunden; dann [illegible] aus dem Reihe $\frac{x}{\delta\delta} = [illegible]$

Denn wird $(1+b)^{-x} = \frac{1}{1+b} = 1 - b + b^2 - b^3 + \frac{b^4}{1+b}$

was auch $1 - xb - \frac{x(-x-1)}{2}b^2 - \frac{x(x-1)(-x-2)}{2\cdot 3}b^3$

giebt wenn $x=1$ ist

und die Analogie konnte statt finden weil wenn $x = -x$ ist $(1+b)^x = \frac{1}{(1+b)^x}$ einer ähnlichen Form als $\frac{1}{1+z}$

Es sieht man auch die Reihen der Coeffi. auch.

Anmerkung Cf Nro 38. über das Suppl. Glied.

III Fortsetzung

Ist A_1 gegeben wie werde ich a finden. Ich setze $x = 1$ und bekomme dann

I) $a^x = 1 + A_1 x + \frac{A_1^2 x^2}{2!} + \frac{A_1^3 x^3}{3!} + \frac{A_1^4 x^4}{4!} + \dots$

α) $a = 1 + A_1 + \frac{A_1^2}{2!} + \frac{A_1^3}{3!} + \frac{A_1^4}{4!} + \dots$

und daraus ist a bestimmt, wenn ich nur zuerst die Reihe vollziehe

Aus der Gl. I) lassen sich verschiedene ~~Gleich~~ Gl. bilden, je nachdem man für A_1 etwas setzt. Setze ich $A_1 = 1$ und berechne a daraus bekomme ich irgend etwas bestimmtes das ich e nenne, so wird für $A_1 = 1$ das $a = e$ so verwandelt sich die Gl: I in

β) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

welche Gleichung die e bestimmten Zustand vorstellt, wobei x keinen Beschränkung mehr enthält. wo auch x eine dtt. z. Z. ist (beiläufig ist $e = 2,718\dots$) cf. die Rechn. IX, XI fort. Die Reihen α und β sind durch gewisse Unterschieden dass A_1 kann auch x vorstellen

so wird $\alpha = e^{A_1}$ sobald nehmlich 31.
$A_1 = x$ gesetzt wird, was sein kann
da A_1 alle möglichen Werthe haben kann

Jetzt mache ich den wichtigen Uebergang der Reihe in α) statt für e^x eine
eine Bedeutung ich denke mir nehmlich x
nicht eine Diff gezogen Zahlen sondern ir-
gend etwas, da nun e^x nicht bestimmt
wurde wenn x ganz allgemein ist,
so steht mir frei es ab zu bestimmen
und zwar durch die obere Reihe

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

So wir nicht in Widerspruch stehen
denn ist x eine Diff Zahl ist
e^x auch der Reihe gleich, denn so haben
wir alles bisher behandelt. Ist aber
x etwas anderes als Diff ganze Zahl, dann
giebt e^x das was die Reihe giebt
wenn x deshalb, dasselbe bedeutet.

32. Es ist nur zu untersuchen ob die Formeln für Differenz Potenzen noch für die allg. Potenzen gelten. Man müsste daß $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ wenn x und y diff. ganz. sind. oder ob die Gl. gilt wenn x und y beliebig werden, setzen wir die = Reihen statt e^x, e^y, e^{x+y}. und sehen zu ob dann Gl. zwischen den Reihen nun identisch ist d.h. ob

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)\left(1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\dots\right) =$$

$$= 1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2!}+\frac{(x+y)^3}{3!}+\dots$$

Wenn man die Reihen durchsehen kann dasselbe bewiesen. Es. Konvergenz. Die zweite Formel ergibt sich aus der ersten.

Wenn $\log^e b = z$ so ist nach Definition des Log: $e^z = b$. Ist nun e^z = der unendl. Reihe so soll diese = b sein. Es ist nun die Frage ob b nur ein Ausdruck e^z ist, denn die Eigenschaft

zukommt, dass e mit ihm potenzirt 33.
b giebt. Wenn die n^{te} Wurzel sich
in solche Ausdrücke die dieselbe
Eigenschaft haben. Analysis zeigt
daß es unendliche Ausdrücke giebt [illegible]
z, denen dieselbe Eigenschaft
zukommt. das z ist der natürliche
Logarithme.
Also weiss man nun die Untersuchung.
Man findet sich immer das Logarithme von b
die Wurzel erfordert [illegible] herausziehen
zu der Analysis
Ich betrachte in der Reihe $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
nur die ungeraden Glieder mit wechselnden
Zeichen diese sind $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
welche gleich ist $\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$
welcher Ausdruck endliche Form hat
und ich mit ihm also arbeiten kann
Die Reihe der ungeraden Gl.: $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$
giebt als Resultat. $\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, wo
wir dieselben Nenner haben

34.

Die beyden sind die merkwürdigsten und [illegible] zu [illegible] umzuge-heben. Der Werth der Reihen hängt von x ab, sind also Funct. von x. und solche Functionen pflegt man anders auszudrücken so soll die erste Reihe durch Cos x die andere durch Sin x ausgedrückt werden so daß

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

Nachträge zur II u. III Vorlesung

Die ganze zweite [3te] Vorlesung geht darauf hin die Bedeutung der allg. Größe e^x festzustellen, wozu aus der Reihenentwickl. von $(1+b)^{1/x} = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$ dann [illegible] Weg besteht. Man muß nur daraus [illegible] ausgehen dem ganzen zuerst eine [illegible] [illegible] Form zu geben

dieser setze ich zuerst $(1+b) = a$ und bekomme
$a^x = 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots$ nur werden
die Coeff. A_1 A_2 u. s. f. nicht mehr Reihen sein
die nach Potenzen von b fortlaufen
wie es in der Reihe $(1+b)^x = 1 + A_1x + A_2x^2 + \ldots$
ist, sondern die nach Potenzen von $(a-1)$ fort-
laufen, denn aus der Gl. $(1+b) = a$ ist $b = (a-1)$

Jetzt muss man suchen alle Coefficienten
durch einen z. B. den bequemsten A_1 auszu-
drücken, um durch diese Gleichmäßigkeit
statt A_1 alles mögliche setzen zu können.
daher muss man Gleichungen zwischen den Coeff.
bilden, welche sich durch Hülfe des Satzes

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

leicht bilden lassen werden. Nehmlich
statt der Ausdrücke ihre Reihen rechts
gesetzt, giebt.

$$x^3+3x^2y+3y^2x+y^3$$
$$x+y$$
$$x^3y+3x^2y^2+3xy^3+y^4$$
$$x^4+3x^3y+3x^2y^2+xy^3$$
$$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

$$(1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3\ldots)(1+A_1y+A_2y^2+A_3y^3+\ldots) = 1+A_1(x+y)+A_2(x+y)^2+A_3(x+y)^3+\ldots$$

durchgeführt erhalten wir

links
$$1+A_1y+A_2y^2+A_3y^3+\ldots$$
$$+A_1x+A_1^2yx+A_1A_2xy^2+A_1A_3xy^3+\ldots$$
$$+A_2x^2+A_1A_2x^2y+A_2^2x^2y^2+A_2A_3x^2y^3+\ldots$$
$$+A_3x^3+A_1A_3x^3y+A_3A_2x^3y^2+A_3^2x^3y^3+\ldots$$

rechts
$$1+A_1x+A_1y+$$
$$+A_2x^2+2A_2xy+A_2y^2+$$
$$+A_3x^3+3A_3x^2y+3A_3xy^2+A_3y^3+\ldots$$
$$+A_4x^4+4A_4x^3y+6A_4x^2y^2+4A_4xy^3+$$
$$+A_4y^4+\ldots$$

geordnet nach Pot. v. x.

$$(1+A_1y+A_2y^2+A_3y^3+\ldots)+(A_1+A_1^2y+A_1A_2y^2+A_1A_3y^3)x+($$

geordnet nach P. v. x. giebt

$$\left(1+A_1y+A_2y^2+A_3y^3+\cdots\right)+A_1\left(1+A_1y+A_2y^2+A_3y^3+\right)x+$$
$$+A_2\left(1+A_1y+A_2y^2+\cdots\right)x^2+A_3\left(1+A_1y+A_2y^2+\cdots\right)x^3+\cdots$$
$$=\left(1+A_1y+A_2y^2+A_3y^3+\cdots\right)+\left(A_1+2A_2y+3A_3y^2+\cdots\right)x+$$
$$+\left(A_2+3A_3y+6A_4y^2+\cdots\right)x^2+\left(A_3+4A_4y+\cdots\right)x^3+$$
$$+\cdots$$

Dann entstehen die Gleichungen

1) $A_1\left(1+A_1y+A_2y^2+A_3y^3+\cdots\right)=A_1+2A_2y+3A_3y^2+\cdots$

$A_1+A_1^2y+A_1A_2y^2+A_3A_1y^3+\cdots=$ ―――――

und vermöge der unbest. Coeff ist die Gl. $A_1^2=2A_2$ daher $A_2=\frac{(A_1)^2}{2}$

$A_2A_1=3A_3$

$A_3=\frac{A_2\cdot A_1}{3}=\frac{A_1^2A_1}{2\cdot 3}$

2) $A_2\left(1+A_1y+A_2y^2+\cdots\right)=A_2+3A_3y+6A_4y^2+\cdots$

$A_2+A_2A_1y+A_2^2y^2+\cdots=$ ―――――

und vermöge der unb: Coeff ist die Gl.

$A_2A_1=3A_3$ oder da $A_2=\frac{(A_1^2)}{2}$

$\frac{(A_1)^3}{2}=3A_3$ daher

$$A_3=\frac{(A_1)^3}{2\cdot 3}$$

3) $A_3(1+A_1y+A_2y^2+A_3y^3+\dots) = A_3+4A_4y+\dots$ 37.

$A_3 + A_3A_1y + A_3A_2y^2 + A_3^2y^3+\dots) = A_3+4A_4y+\dots$

nach der Methode der unbest. Coeff. d. Gl.

$A_3A_1y = 4A_4y$ oder da $A_3 = \frac{(A_1)^3}{2\cdot 3}$

$\frac{(A_1)^4}{2\cdot 3\cdot 4} = A_4$.

Durch dieselbe Schl. finden sich alle übrigen Coeff. von x alle in A_1 ausgedrückt, so daß, aus der Gl. $a^x = 1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\dots$

$a^x = 1+A_1x+\frac{(A_1)^2}{2}x^2+\frac{(A_1)^3}{2\cdot 3}x^3+\dots$ wird

welche da die Nenner Facultaeten sind in folgende übergeht.

$a^x = 1+A_1x+\frac{A_1^2\cdot x^2}{2!}+\frac{A_1^3\cdot x^3}{3!}+\dots$

wo $A_1 = (a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\frac{1}{4}(a-1)^4+\dots$

das ist nämlich die obige Bestimmung des ersten Coeff. in b oder in $(a-1)$ wenn $a=(b+1)$

Es versteht sich von selbst, daß da die Reihe für a^x dieselbe ist als die für $(1+b)^x$ daß auch für das Ergänzungsglied zukommen muß, welches zu 4ten Glied $= \frac{(A_1)^4\cdot x^4}{4!\cdot a^x}$

hier wird nach sich ergiebt ~~wenn ist x = 1 folgt~~

auch diese Art. zu der Gl.

I) $a^x = 1 + A_1 x + \frac{A_1^2}{2!} x^2 + \frac{A_1^3}{3!} x^3 + ----$

setzt a statt $(1+b)$ und $\frac{A_1^2}{2!}$ statt A_2 und $\frac{A_1^3}{3!}$ statt A_3 u. s. f.

~~da nun wieder~~ also muss die Reihe I ein Ergänzungsglied haben wenn die Reihe

II $(1+b)^x = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + ---$

eins hat. Ich stelle daher

<u>Untersuchung</u> über das <u>Supplementglied</u>.

Die Reihe 2 ist aus der Reihe

III) $(1+b)^x = 1 + xb + \frac{x(x-1)}{2} b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3} b^3 + ---$

entstanden von der das Supplementglied S. 29 angegeben wurde. Es folgt daher dass auch die Reihe II mithin auch die Reihe I ein Supplementglied haben muss. Es fragt sich nur wie werden wir dieses bestimmen. Dieses Glied bestimmt sich natürlich gleich bei der Bildung der II Reihe aus der III) sobald der letzteren ein Supplementglied zukommen

Denn wenn die Reihe III aus $(1+b)^x$ entstehen, 39.
wo x absolut war, dann hörten sie
selbst auch bei $(x+2)^{ten}$ Gliede, denn da wird
ein Faktor $=0$. Die Reihe wird nur haben
$(x+1)$ Glieder, Setzen wir die Reihe um
umwandeln, so kann die neue auch nur eine
bestimmte Anzahl von Gliedern haben,
und ihre Coeff: aus denselben Gliedern auch
nur Reihen sein von bestimmter Anzahl von
Glieder, weil diese die Grössen sind ~~mit~~
welche mit x, oder x^2, x^3, x^4 afficirt sind
und der x, x^2, x^3 etc in einer bestimmten Anzahl
von Gliedern, auch nur finite enthalten
sein können, so sind auch die afficirten
Glieder finite.

Wenn aber die Reihe III, aus $(1+b)^x$ entstanden
wo $x=-x$ war. dann war ein Ergänzungs-
glied nöthig, welches wir bei dem 5ten Gliede
stehenbleibend Nro 29 in $\frac{-x(-x-1)(-x-2)(-x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{b^4}{(1+b)^x}$
aufgefunden haben.

Nun ist klar dass alle Reihen die aus den mit
x, x^2, x^3 etc afficirten Gl: entstehen ihre Ergän-
zungen in dem Ergänzungsgliede der Haupt-
reihe III) haben müssen! Das suppl: Glied
aber der neuen II) Reihe selbst sich auch
aus dem Suppl der III) Reihe bilden muss
und zwar der Analogie nach wird

das Suppl: Glied der II) Reihe, wenn wir bei 5ten Glied stehen bleiben, sein $\frac{A_4 x^4}{(1+b)^x}$, so daß die Reihe sein wird

(A) $(1+b)^{-x} = \frac{1}{(1+b)^x} = 1 - A_1 x + A_2 x^2 - A_3 x^3 + \frac{A_4 x^4}{(1+b)^x}$

(B) oder $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = 1 - A_1 x + \frac{A_1^2 x^2}{2!} - \frac{(A_1)^3 x^3}{3!} + \frac{(A_1)^4}{4!} \frac{x^4}{a^x}$

Die Evidenz der Richtigkeit dieser Gleichung ergiebt sich, die Theorie welche lehrt, daß ein Supplementglied hinzukommen muß, und der Analogie welche anzeigt, daß es so beschaffen sein muß.

Hat man die Reihe $a^x = 1 + A_1 x + \frac{A_1^2 x^2}{2!} + \frac{A_1^3 x^3}{3!} + \dots$ I) so suche ich die A_1, A_1^2 etc herauszuschaffen, indem ich sie $= 1$ setze und dazu a bestimme, welche dieses funct. von A_1 ist. Diese Bestimmung wird geschehen, wenn ich in der Reihe I) $x = 1$ setze so bekomme ich

$a = 1 + A_1 + \frac{A_1^2}{2!} + \frac{A_1^3}{3!} + \dots$ ist nun $A_1 = 1$ so ist

$a = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$ cf. Vten 46.

(Fortsetzung) Fortsetzung zur Seite 19.

Man sieht, daß es schwer ist, die einmal Reihe durch ganz ähnlichen Wege dividiren zu wollen. Wir wenden hier daher die Methode der unbestimmten Coefficienten an. d. h. die Form des Ausdrucks ist gegeben ist nämlich $1+ab+a_1b^2+a_2b^3+\ldots$

so muß $\dfrac{1}{1+\alpha b+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}b^2+\ldots} = 1+ab+a_1b^2+a_2b^3+\ldots$

also $1 = \left(1+\alpha b+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}b^2+\ldots\right)\left(1+ab+a_1b^2+a_2b^3+\ldots\right)$

Wenn man die Multiplication verrichtet

so wird $1 = 1 + \left.\begin{matrix}a\\+\alpha\end{matrix}\right\} b + \left.\begin{matrix}a_1\\+a\alpha\\+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\end{matrix}\right\} b^2 + \left.\begin{matrix}a_2\\ \alpha a_1\\ \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}a\\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2.3.}\end{matrix}\right\} b^3$

Ich bilde mir solche Art:

$1+0b+0b^2+0b^3+\ldots =$ demselben.

daher die Gleichungen zwischen den Coefficienten aus denen sich a, a_1, a_2, a_3 etc bestimmen muß.

12

I) $a + x = 0$

II) $a_1 + ax + \frac{x(x-1)}{2} = 0$

III) $a_2 + a_1 x + \frac{x(x-1)}{2} a + \frac{x(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3} = 0$

Aus der Gl I ist $a = -x$

dieses angewendet verwandelt sich die II Gleichung in

II $a_1 - x^2 + \frac{x(x-1)}{2} = 0$ oder

$a_1 - x^2 + \frac{x^2 - x}{2} = 0$ oder

$-a_1 + \frac{x^2 + x}{2} = 0$ oder

$a_1 = \frac{x(x+1)}{2} = -\frac{x(-x-1)}{2}$

Setzt man die beyde Werthe in die dritten Gl: so erhält man

III $a_2 - x^2 + \frac{x^2(x^2-1)}{4} + \frac{x(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3} = 0$ oder

$a_2 - \frac{4x^2 + x^4 - x^2}{4} + \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6} = 0$ oder

$a_2 - \frac{24x^2 + 6x^4 - 6x^2 + 4x^3 - 12x^2 + 8x}{12} = 0$

$a_2 - \frac{12x^2 + 3x^4 - 3x^2 + 2x^3 - 6x^2 + 4x}{6} = 0$

$a_2 + \frac{3x^4 + 2x^3 - 21x^2 + 4x}{6} = 0$

$x - 1$
$x + 1$
$x^2 - x$
$x - 1$
$x^2 - 1$

$x^2 - x$
$x - 2$
$-2x^2 + 2x$
$x^3 - x^2$
$x^3 - 3x^2 + 2x$

III $a_2 + \frac{x^2(x+1)}{2} - \frac{x^2(x-1)}{2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3} = 0$

$a_2 + \frac{x^3+x^2-x^3+x^2}{2} + \frac{x^3-3x^2+2x}{2\cdot 3} = 0$

$a_2 + \frac{3x^3+3x^2-3x^3+3x^2+x^3-3x^2+2x}{6} = 0$

$a_2 + \frac{x^3+3x^2+2x}{2\cdot 3} = 0$

$a_2 = \frac{-x^3-3x^2-2x}{2\cdot 3} = \frac{-x(-x-1)(-x-2)}{2\cdot 3}$ denn $\begin{array}{r} x^2+x \\ -x-2 \\ \hline -x^3-2x^2-2x \end{array}$

So bestimmen sich auch alle übrigen Coefficienten

Solche Division der unendlichen Reihen kann ich auch durch das sogenannte Differenziren verrichten

nehmlich soll

$\frac{1}{1+xb+\frac{x(x-1)}{2}b^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}b^3+\dots} = z + ab + a_1 b^2 + a_2 b^3$ werden

so folgt ich um das erste Glied zu bestimmen $b=0$

so wird $\frac{1}{1} = z$ d. h. $z=1$.

Um den Coefficienten des zweiten Gliedes

zu bestimmen

so subtrahire ich in der Reihe von beyden Seiten das 1 und bekomme dann

$$\frac{1}{1+xb+\frac{x(x-1)}{2}b^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}b^3+\dots} = 1+ab+a_1b^2+a_2b^3+\dots$$

$$\frac{1-1-xb-\frac{x(x-1)}{2}b^2-\frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}b^3-\dots}{1+xb+\frac{x(x-1)}{2}b^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}b^3+\dots} = ab+a_1b^2+a_2b^3+\dots$$

dividire die Gl: durch b und bekomme

A) $$\frac{-x-\frac{x(x-1)}{2}b-\frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}b^2-\dots}{1+xb+\frac{x(x-1)}{2}b^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}b^2+\dots} = a+a_1b+a_2b^2+\dots$$

Setze $b=0$ und bekomme

$-x=a$

Um den Coeff: des 3ten Gliedes zu finden so wende ich dasselbe Verfahren an. Ziehe in der Gl: A. $\underline{a}$ ab und erhalte:

$$\frac{-x-\frac{x(x-1)}{2}b-\frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}b^2-\dots-a-axb-\frac{ax(x-1)}{2}b^2-\frac{ax(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}b^3-\dots}{1+xb+\frac{x(x-1)}{2}b^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}b^3+\dots} = a_1b+a_2b^2+\dots$$

dann setze ich statt a seinen Werth $-x$ und bekomme so

$$\frac{-x-\frac{x(x-1)}{2}b-\frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot3}b^2-\dots+x+x^2b+\frac{x^2(x-1)}{2}b^2+\frac{x^2(x-1)(x-2)}{2\cdot3}b^3+\dots}{1+xb+\frac{x(x-1)}{2}b^2+\dots}=$$

$$=a_1b+a_2b^2+\dots$$

Jetzt hebt sich $-x$ und $+x$. und $\left(\frac{-x^2+x}{2}\right)b$ und $+\frac{2x^2b}{2}$

zusammengezogen giebt $\frac{x^2b+xb}{2}=\frac{x(x+1)}{2}b$

~~Jetzt giebt $-\frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot3}b^2$ oder $-\frac{x^3b^2+3x^2b^2-2xb^2}{2\cdot3}$ mit $\frac{x^3b^2-xb^2}{2}$ oder $\frac{3x^3b^2-3xb^2}{2\cdot3}$ giebt $\frac{2x^3b^2+3x^2b^2-5xb^2}{2\cdot3}$ oder~~

und es wird

$$\frac{\frac{x(x+1)}{2}b-\frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot3}b^2\dots+\frac{x^2(x-1)}{2}b^2+\dots}{1+xb+\frac{x(x-1)}{2}b^2+\dots}=$$

$$=a_1b+a_2b^2+\dots$$

dividirt man durch b weg so wird

$$\frac{\frac{x(x+1)}{2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot3}b-\dots+\frac{x^2(x-1)}{2}b+\dots}{1+xb+\frac{x(x-1)}{2}b^2+\dots}=a_1+a_2b$$

setze ich $b=0$ so wird $\frac{x(x+1)}{2}$ oder $\frac{-x(-x-1)}{2}=a_1$

so findet man alle übrigen Coeffi-

finden die Coefficienten

Um es hier mit der Praxis zu thun zu haben, um das a zu bestimmen, so müssen wir so viel Ausdrücke, bis der, den wir auslassen, und sehr wenig Einfluss auf die Bestimmung haben kann. Es sei also a in Decimalbrüchen bestimmt

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040}$$

oder $a =$ 2
0,5
0,1666 . . .
0,04166 . . .
0,008333 . . .
0,0013888 . . .
0,00019869 . . .

$= 2,716$ . . .

Da $A_1 = 1$ wird also $a = e$ und in die allg. gleichung nämlich in $a^x = 1 + A_1 x + \frac{A_1^2 x^2}{2!} + \dots$

giebt $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

welche Reihe auf die Bestimmung der allg. Potenz giebt.

es ist nun die Frage ob die Formel gel-
ten ob $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ d.h. ob

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\right)=1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2!}+\frac{(x+y)^3}{3!}+\cdots$$

Ausgeführt ob

links.

$$\begin{aligned}&1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\\&+x+xy+\frac{xy^2}{2!}+\frac{xy^3}{3!}+\cdots\\&+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^2y}{2!}+\frac{x^2}{2!}\frac{y^2}{2!}+\frac{x^2}{2!}\frac{y^3}{3!}+\cdots\\&+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^3y}{3!}+\frac{x^3}{3!}\frac{y^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\frac{y^3}{3!}+\cdots\end{aligned}
\;=\;
\begin{aligned}&1+x+y+\\&+\frac{x^2}{2!}+\frac{y^2}{2!}+\frac{2xy}{2!}+\\&+\frac{x^3}{3!}+\frac{3x^2y}{3!}+\frac{3xy^2}{3!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\end{aligned}$$

wir ordnen das übrige nach x und erhalten

$$x\left(y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\right)+\left(\frac{y}{2!}+\frac{y^2}{2!2!}+\frac{y^3}{2!3!}+\cdots\right)x^2+\left(\frac{y}{3!}+\frac{y^2}{3!2!}+\frac{y^3}{3!3!}+\cdots\right)+\cdots$$

$$=\left(\frac{2y}{2!}+\frac{3y^2}{3!}+\cdots\right)x+\left(\frac{3y}{3!}+\cdots\right)x^2+\cdots$$

ob also $y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots=\frac{2y}{2!}+\frac{3y^2}{3!}+\cdots$

ähnlich ist dann $y=\frac{2y}{2!}$ und $\frac{y^2}{2!}=\frac{3y^2}{1\cdot2\cdot3}$ u.s.f.

eben so gehen auch alle übrigen
Gleichungen, so daß links und rechts
dasselbe herauskommt.

Natürlich beruht die Evidenz nur auf der Analogie, weil wir alle Glieder nicht ausschreiben können, und es muss daher die Analyse sich bemühen, durch ein Glied, gleichsam durch Repräsentanten jedes einzelnen Gliedes der Reihe, die ganze Reihe darzustellen. Denn wird auch eine vollkommene Einsicht möglich.

Die zweite Formel $a^x : a^y = a^{x-y}$ ergiebt sich aus der ersten, weil $a^{x-y} \cdot a^y$ nach derselben a^{x-y+y} oder a^x giebt.

IV Fortsetzung

Es ist also $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$

~~Man sieht~~ Es ergiebt sich daraus $(\cos x)^2 + (\sin)^x = 1$ ist. denn

$$\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}} + 2e^0}{4} =$$

$$\frac{e^{2x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}} + 2}{4}$$

$$\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{e^{2x\sqrt{-1}}+e^{-2x\sqrt{-1}}-2}{-4} = \frac{-e^{2x\sqrt{-1}}-e^{-2x\sqrt{-1}}+2}{4}$$

$$\frac{e^{2x\sqrt{-1}}+e^{-2x\sqrt{-1}}+2}{4} + \frac{-e^{2x\sqrt{-1}}-e^{-2x\sqrt{-1}}+2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Durch denselben Schluss der Buchstaben-rechnung ergiebt sich daß $\cos 0 = 1$ ist. $\sin 0 = 0$. welches sich ergiebt, wenn man entweder in die Reihen-ausdrücke von $\cos x$ und $\sin x$, oder in die andern Ausdrücke derselben statt x, 0 setzt.

Aus demselben Grunde ist $\cos(-x) = \cos x$ weil in der Reihe von $\cos x$ nur gerade potenzen vorkommen, und diese von $(-x)$ gleiche darstellen.

$\sin(-x) = -\sin x$

weil es dieselbe Reihe bekommen nur mit entgegengesetzten Zeichen, welche durch man die Reihe giebt nur − Zeichen vorgesetzt und der Reihe giebt $\sin x$.

Besondere Eigenschaften dieser Reihen sind

1) $\text{Sin}(x+y) = \text{Sin}\,x \cdot \cos y + \cos x \cdot \text{Sin}\,y$

Denke ich mir $y = -y$ so wird

$\text{Sin}(x-y) = \text{Sin}\,x \cos -y + \cos x \cdot \text{Sin} -y$

da $\cos -y = \cos y$ und
$\text{Sin} -y = -\text{Sin}\,y$ so wird

2) $\text{Sin}(x-y) = \text{Sin}\,x \cdot \cos y - \cos x \cdot \text{Sin}\,y$

Setze ich statt x in der 2 Gl: $(x+y)$
so bekomme ich

3) $\text{Sin}\,x = \text{Sin}(x+y)\cos y - \cos(x+y)\,\text{Sin}\,y$

Setze ich in der 2. Gl. statt $y = x+y$

4) $-\text{Sin} = \text{Sin}\,x(\cos(x+y)) - \cos x(\text{Sin}(x+y))$

ist $\text{Sin}(x+y) = u$ und $\cos(x+y) = v$.

wird
$\text{Sin}\,x = u \cdot \cos y - v \cdot \text{Sin}\,y$ oder
$x = u\alpha - v\beta$
$\text{Sin} -x = u$

daß α nur einen Werth hat, also hat das $Log^e a$ unendlich viele Werthe.

daß α nur 1. Werth hat, denn

$$e^\alpha = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + - - -$$

nun ab sieht man daß je größer das α ist desto größer wird die Reihe. daher ich setze $\alpha = -\gamma$ so wird

$$e^\alpha = e^{-\gamma} = \frac{1}{e^\gamma} = \text{macht } \gamma \text{ positiv}$$

so wird die Reihe immer kleiner. also für α negativ und unendlich groß ist giebt eine Reihe die positiv ist aber immer kl: wird. also für e^α wenn α reell ist, mag α pos. oder negat. sein wird der Ausdruck e^α immer positiv daher der [illegible] immer positiv angenommen [illegible] werden.

α ist $= L(+\sqrt{p^2+q^2})$ aber nicht [illegible] Werth, aber nur der einzige der α [illegible] stellt. daher ich [illegible] L schreiben

56 der ~~log~~ allen Wurzeln angehört, denen dieselben Eigenschaft zukommt.

Nun wird die Aufgabe den log. aus einer positiven Zahl $\sqrt{p^2+q^2}$ zu bestimmen, und zwar durch den einzigen reellen Ausdruck. Das haben wir schon gefunden

dass $e^{A_1} = 1 + A_1 + \frac{A_1^2}{2!} + \frac{A_1^3}{3!} + \dots = a$

also $A_1 = La$

und wir haben gefunden

$A_1 = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \dots = La$

Setze ich also statt $a = +\sqrt{p^2+q^2}$ so werden wir $L(+\sqrt{p^2+q^2})$ haben

Daraus wird nun

$L(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$

diese Reihe war unser Zweck
dazu dienen brauche ich die Diff. Rechn.:

Wir fanden $a^x = 1 + A_1 x + \frac{A_1^2}{2!} x^2 + \dots$

also $a^x = 1 + x \log a + \frac{x^2 (\log a)^2}{2!} + \dots$

Natur: Logarithmen 53.

$\log^e a = z$ wo e die bekannte Zahl 2,718... ist, so daß $e^z = a$ wird. wo z reell oder imag: ist aber immer von der Form $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, wo α und β reell sind. Nun kann ich allen die Werthe von z zu finden, oder den $\log(p+q\sqrt{-1})$ zu finden. dergestalt muss die Form $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ haben kann, so ist nur die Form bekannt und ich muss α und β finden. Weil a reell und imagin ist so ist $= p+q\sqrt{-1}$ Wann angegeben ist z zu finden

so daß $e^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})} = p+q\sqrt{-1}$ und aus dieser Gl: muss ich nun z bilden

$e^\alpha \cdot e^{\beta\sqrt{-1}} = p+q\sqrt{-1}$ aber $e^{\beta\sqrt{-1}}$ ist $= \cos\beta+\sqrt{-1}\cdot\sin\beta$

weil $\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$

$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$

$e^\alpha(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta) = p+q\sqrt{-1}$

$\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta = \frac{p}{e^\alpha} + \frac{q\sqrt{-1}}{e^\alpha}$

oder $\cos x = \frac{u+v}{2}$

$\sin x = \frac{u+v}{2\sqrt{-1}}$ und dar-

folglich

$\cos\beta = \frac{p}{e^\alpha}$ und $\sin\beta = \frac{q}{e^\alpha}$

findet sich daß $u =$ man muss beide Gl in v auflösen!

Beide Gl. quadrirt und addirt um β zu eliminiren

$\frac{u+v}{2\sqrt{-1}} = \sqrt{1-\frac{u^2+2uv+v^2}{4}}$ $u^2+v^2+2uv=$

$$(\cos\beta)^2 + (\sin\beta)^2 = \frac{p^2}{(e^\alpha)^2} + \frac{q^2}{(e^\alpha)^2}$$

$$1 = \frac{p^2}{(e^\alpha)^2} + \frac{q^2}{(e^\alpha)^2}$$

$$e^\alpha = \sqrt{p^2+q^2}$$

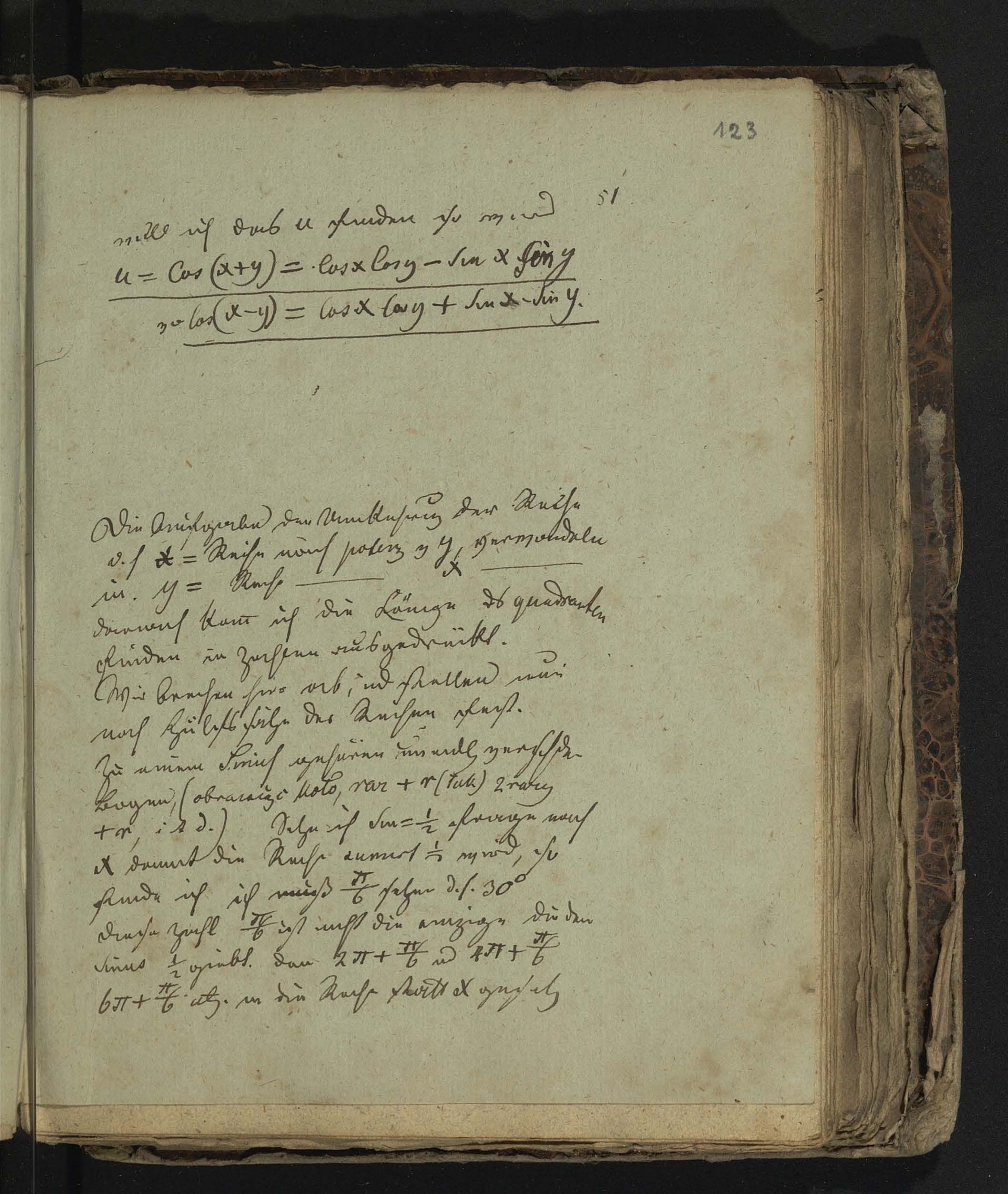
hier ist nur positiver Werth anzunehmen weil die unendliche Reihe für e^α nie negativ wird wenn α reell ist.

Cos β ist nun $\frac{p}{+\sqrt{p^2+q^2}}$ und Sin β $= \frac{q}{+\sqrt{p^2+q^2}}$.

Da β durch Sin und Cos zugleich gegeben ist, so können wir nun einen Bogen aus der Tabelle finden der kl. Bogen φ. und addir ich dazu $2n\pi$ dazu so wird

$$\beta = 2n\pi + \varphi \text{ sein}$$

daher hat β unendlich viele Werthe fort. Es bringt sich daraus hin



51

will ich das u finden so wird

$u = \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$z = \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$

Die Aufgaben der Umkehrung der Reihe d. h. x = Reihe nach potenz v. y, Harmonalen u. y = Reihe ——— darnach kann ich die Länge des quadranten finden in Zahlen ausgedrückt.
Wir brauchen hier ab, und stellen nur noch kürzlich Sätze der Reihen fest.
Zu einem Sinus gehören unendlich verschiedene Bogen, (abwärts Rolo, $r\pi + r$ (Fall) $2r\pi + r$, u. s. w.) Setze ich $\sin = \frac{1}{2}$ frage nach x damit die Reihe gerade $\frac{1}{2}$ wird, so finde ich ich muß $\frac{\pi}{6}$ setzen d. h. 30°
Diese Zahl $\frac{\pi}{6}$ ist nicht die einzige die den Sinus $\frac{1}{2}$ giebt. denn $2\pi + \frac{\pi}{6}$ u. $4\pi + \frac{\pi}{6}$ $6\pi + \frac{\pi}{6}$ etc. in die Reihe statt x gesetzt

52 giebt genau dieselben. und so bekommen
wir die Resultate

$\underline{\sin(\pm 2n\pi+\varphi) = \sin\varphi}$. π ist der ½ Kreis, 2π
der ganze Kreis n ganze Zahl, φ ein Bogen.
d. h. setze ich in der Reihe statt x,
$\pm 2n\pi+\varphi$ setz und [illegible] [illegible]
berechnet [illegible] φ bekommen.

$\underline{\cos(\pm 2n\pi+\varphi) = \cos\varphi}$

Ist φ ein beliebiger $\angle$ oder einfacher
Bogen, muss man sich bemerken, daß
dem kein Bogen denselben Sin u. Cos
~~[illegible]~~ zugehört als nur die unendlich vielen
die in der formel $(\pm 2n\pi+\varphi)$ stecken
wenn man statt n, allen Zahlen
von 0 bis ins unendl. dies bemerkt
Ohm im II buche der Analysis. Also wenn
die Tabellen nur für φ zwischen durch
Linie [illegible], und zugleich für
alle $\angle\angle$ haben, wenn man $\pm 2n\pi$ addirt

Diese Gl. gilt nur wenn x = ganze
Zahlen, nun wollen wir uns
unter a^x die Reihe $1 + x \log a + \frac{x^2(\log a)^2}{2!} + \dots$
denken, wenn x jedwedes ist.
Dies ist die allgemeinste Potenz
log a hat aber unendlich viele Werthe
und x wenn es = ganze Z. ist so giebt
die Reihe immer a^x ich mag für
log a setzen einen Werth den ich will
verschafft sich durchgängig.
Aber setze ich x ein jedwedes so bekomt
die Reihe nicht immer denselben
Werth. Also deutet die allg. Pot. a^x
alle die Werthe an, welche ich bekom-
me d. Reihe, wenn ich für x irgend
etwas setze. So ist der Begriff der allg.
Potenz vieldeutig
bei Bruchexponenten zeigt sich daß wenn
x = gebrochene Zahl ist, die Potenz so
vieldeutig ist, als der Nenner des Bruches
andeutet, nachdem man den Bruch gehoben
hat. Ist x irrational, dann hat sie unendlich viele
Werthe eine irrat. Zahl der Nenner eine unendlich große
Zahl.

58 Werthe, ist x imaginair dann hat die Potenz nirgends unendlich viel Werthe.
Daran müsste man noch untersuchen, in wie weit die Formeln auch für alle Potenzen gelten. Cf. die Analysis.

Die gewöhnliche Behandlung derselben, wovon wir bis jetzt gut gehalten haben.

Die erste Aufgabe a^x in unendliche Reihe nach Potenzen von x zu verwandeln.
Das geschieht gewöhnlich durch die Methode der unbestimmten Coeff. und zwar

$$a^x = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \dots$$

Dies ist Annahme, und glaubt man dass sich in der Ausführung kein Widerspruch findet so ist die Annahme richtig. (Der Schluss ist falsch). Dass das erste Gl. 1 sein muss ergiebt sich wenn $x = 0$ ist.
Um die Coeff. zu finden gebraucht man den Satz $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, wenn man die Reihe setzt wie wir bekommen. $A_2 = \frac{A_1^2}{2!}$

$A_3 = \frac{A_1^3}{3!}$ u. s. f. Dasselbe wie früher

Nun sollen wir freilich die Reihe nach
vorausgesetzt finden die gefundenen und
denselben wie aber x Coeff. gez. Zeichen
die Coeff. finde ich nur während doch
man x nicht ganze Zahl bedeutet die Reihe
nichts besseres bedeutet cf. Ohms Aufsätze
aus dem Gebiete der höhern Math. 1823.
wo gezeigt ist warum die Resultate
falsch sein mußten.
Das A_1 bleibt unbestimmt, deshalb weil
die Reihe dem Ausdruck a^x nicht
identisch ist, sondern nur die Eigenschaft
mit ihm gemein hat, daß wenn man
in der Reihe statt x, y setzt, und die
beyden Reihen multiplizirt, das Product
= einer Reihe sein wird wenn man in
der Reihe statt x, (x+y) setzt.
Nun sucht man die Reihe der Potenz gleich
machen, so daß man für einen bestimmten
Werth von A_1 und dazu angenommenen
Werth für x, die Potenz a^x der Reihe =
wird, dann wird die Identität für
jeden Werth von x statt finden.

60 Die Reihe $a^x = 1 + A_1 x + \frac{(A_1)^2}{2} x^2 + \dots$
braucht den Werth für A_1, wenn man $x = 1$ setzt

$$a = 1 + A_1 + \frac{A_1^2}{2!} + \frac{A_1^3}{3!} + \dots$$

man setzt $A_1 = 1$ und berechnet den Werth für a dazu $= e = 2,715\dots$ so daß

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

NB. daher

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

daher ergiebt sich daß $\left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots\right)^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

Die Basis der Log: man schon früher vorgetragen. und man setzt statt $x = A_1$

$$e^{A_1} = 1 + A_1 + \frac{A_1^2}{2!} + \frac{A_1^3}{0!} + \dots$$

daher $e^{A_1} = a$

$$A_1 = \log a$$

so ist also A_1 gefunden [illegible]
also $$a^x = 1 + x \log a + \frac{x^2 (\log a)^2}{2!} + \frac{x^3 (\log a)^3}{3!} + \dots$$

Wenn man will nun $\log(1+x)$ in einer unendlichen Reihe nach Potenz von x verwandeln so daß ich würde die Reihe mit unbestimmten

Coeff: annehmen, ohne zu bestimmen, ist 61
solche Reihe existirt
Wir nehmen an

$$\log(1+x) = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$$

und will nun b_1, b_2 so zu finden.
so kann ich wieder Reihen ~~die~~ die mit dem
Log. dieselbe Eigenschaft haben
wenn setz $x = y$ und bekomme

$$\log(1+y) = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots$$

subtrahirt die beyden Reihen

$$\log(1+x) - \log(1+y) = \log\left(\frac{1+x}{1+y}\right) = b_1(x-y) + b_2(x^2-y^2) + b_3(x^3-y^3) + \dots$$

nun muß ich $\log\left(\frac{1+x}{1+y}\right)$ in Reihe zu verwandeln
um den Methode der unb. Coeff anzuwenden — $b_1 x - b_1 y$
ich setze $\frac{1+x}{1+y} = 1 + z$ wo $z = \frac{x-y}{1+y}$ so wird — $b_1 x \quad b_2 x^2$

$$\frac{1+x}{1+y} = 1 + \frac{x-y}{1+y}$$ und setze in der Gl. $\log(1+x)$

statt x diesen Werth des z. so wird

$$\log\left(1+\frac{x-y}{1+y}\right) = b_1\left(\frac{x-y}{1+y}\right) + b_2\left(\frac{x-y}{1+y}\right)^2 + \dots$$

denn $\frac{x-y}{1+y} = (x-y)\frac{1}{1+y} = (x-y)(1+y)^{-1}$

$$\left(\frac{x-y}{1+y}\right)^2 = (x-y)^2(1+y)^{-2} \dots \text{etc.}$$

62. so daß jeder Coeff. nach einem Gesetz in der unendl. Reihe nach Potenzen von y bestimmt werden. Es bekommt

$B_2 = -\frac{1}{2}B_1$

$B_3 \quad +\frac{1}{3}B_1$

$B_4 = -\frac{1}{4}B_1$ u. s. f.

wo B_1 unbestimmt ist.

daher wird

$$\log(1+x) = B_1\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots\right)$$

B_1 hängt nun von der Basis des Log. ab. Weil die Reihe gefunden ist für jede Basis weil ($\log a - \log b = \log\left(\frac{a}{b}\right)$) dieses Gesetz für jede Basis gilt.

Es muß also B_1 für bestimmte Basis berechnet werden. Dieses B_1 wird Modul des Log. genannt. Wenn ich die Basis e nehme, welche die natürl. Log. so wird $B_1 = 1$ gefunden.

Allein wie wird die Abhängigkeit B_1 von der Basis nachzuweisen?

Wenn man Log a: von 2 verschiedenen Basis[en] nach d[er] formel $\log^b a \cdot \log^c b = \log^c a$

dann $\log^b a = \frac{\log^c a}{\log^c b}$ dadurch kann man die

Reihen selbst dividiren sich die Reihen und es bleibt [illegible] zwischen Modul

Die Aufgaben: sin x und cos x in unendl. Reihe zu verwandeln.

Ich mache dies nach Eulers Weise durch Annehmen, wo ich dann die Coeff. vermöge der Methode der unb: Coeff. finde.

Denkt man sich einen negativen ∠ $-x$ so hat dieser mit dem positiven denselben Cosinus. Dieser wenn ich in die Reihe, die ich annehme

$$\cos x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

statt x, $(-x)$ setze, so würden alle ungeraden Potenzen negativ, die Reihe würde also für $-x$ etwas anderes geben als für $+x$, mithin würden $\cos x$ und $\cos(-x)$ verschieden sein. Da aber die Cosinuse einander = sind, so kann dieses nicht anders der Fall sein, als daß die Glieder mit ungeraden Potenzen ausfallen, d. h. daß ihre Coeff. = 0 sind. Daher kann für $\cos x$, wenn x pos. oder neg. ist nur folgende Reihe statt finden.

$$\cos x = A_0 + A_2x^2 + A_4x^4 + A_6x^6 + \ldots$$

da $\cos 0 = 1$ ist, weil $x = 0$ dem Rad. ist, also A_0 muss $= 1$ sein, dessen braucht ich den übrigen Coeff. nicht zu finden

nun ist $\frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2} = \cos x \cdot \cos y$

diese Gl. wird erhalten wenn ich die Gl. für $\cos x+y$ und $\cos(x-y)$ addire und durch 2 dividire

$$\cos x = 1 + A_2x^2 + A_4x^4 + A_6x^6 + \ldots$$
$$\cos y = 1 + A_2y^2 + A_4y^4 + A_6y^6 + \ldots$$
$$\cos(x+y) = 1 + A_2(x+y)^2 + A_4(x+y)^4 + \ldots$$
$$\cos(x-y) = 1 + A_2(x-y)^2 + A_4(x-y)^4 + \ldots$$

Nun setze ich in den Gl. statt der Cos. die Reihen zu erhalten ich sodann

$$\frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2} =$$

$$= 1 + A_2x^2 + A_4x^4 + A_6x^6 + \ldots$$
$$+ A_2y^2 + 6A_4x^2y^2 + 15A_6x^4y^2 + \ldots$$
$$+ A_4y^4 + \ldots$$

$$\cos x \cdot \cos y = 1 + A_2x^2 + A_4x^4 + A_6x^6 + \ldots$$
$$+ A_2y^2 + A_2^2x^2y^2 + A_2A_4x^4y^2 + \ldots$$
$$+ A_4y^4 + A_2A_4x^2y^4 + \ldots$$
$$+ \ldots$$

beyde Reihen sind identisch. daraus folgen die Gl:

$$A_2 = A_2$$

$$6A_4 = (A_2)^2 \qquad A_2 = \sqrt{6 \cdot A_4}$$

$$15A_6 = A_2 \cdot A_4 \quad \text{u. s. f.}$$

wo alle Coeff in A_2 ausgedrückt w.
so kann daraus das A_2 zu finden
Man braucht es aber vorläufig
unbestimmt und sucht die Reihe für
$\sin x$.
Nun ist $\sin -x = -\sin x$. d. h. der Sinus des
negativen ∠ ist = dem sin des posit ∠ nur mit
Zeichen verschieden. Nehme ich nun die Gl
$\sin x = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots$ für sin x soll
so würden die paarigen Potenzen von $(-x)$ positiv
die unpaarigen negativ. die Reihe würde also
einen dem Zeichen nach verschiedenen Werth geben
sie soll aber nur dem Zeichen nach verschied. Werth
bekommen daher müssen die Coeff der paarigen Pot $= 0$ sein
da nun $\sin 0 = 0$ ist so ist das erste Glied auch 0. daher kann nur
$\sin x = A_1x + A_3x^3 + A_5x^5 + \ldots$ werden
und finde die Coeff. wenn ich eine Gl: zwischen beiden Sinusreihen. —

66 aber solche Gl: ist unbequem, man nimmt also die Gl.

$$\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}=\sin x \cdot \sin y$$

die Gl: ergiebt sich nun wenn den Gl: für $\cos(x+y)$ und $\cos(x-y)$ subtrahirt

Man setzt nun die Werthe nämlich die Reihen für $\cos(x-y)$ $\cos(x+y)$, $\sin x$ und $\sin y$. Wenn man dß durchführt und ordnet so bekommt man Gleichungen zwischen Coeff und wo alle Coef ~~für~~ in A_1 ausgedrückt werden können. Wodurch alle Coeff in der ersten Reihe und in dieser in A_1 ausgedrückt sind werden und wir bekommen

$$\sin x = A_1 x - \frac{A_1^3 x^3}{3!} + \frac{A_1^5 x^5}{5!} - \ldots$$

$$\cos x = A_1 x - \frac{A_1^2 x^2}{2!} + \frac{A_1^4 x^4}{4!} - \ldots$$

Giebt man nun dem x einen gewissen Werth und bestimmt das A_1 so, daß die Reihe werden den Sin u. Cos: für den Werth von x giebt, so erhält dß dieselbe Werth für

aller Werthe von x gilt. Diese Gl.
genau ist richtig und möchte man
die Existenz einer angenommenen Reihe
wirklich beweisen.

Wenn bestimmt das A_1 für einen ganz
kleinen, sich der Null nähernden verschwindenden
Werth von x, und schließt daß der Werth
des Coeff. eben so bleibt, für jeden Werth
von x, weil der Coeff. von x unabhängig
ist. — Ist aber x im Momente des Wachsens:
so ist sin x dem Bogen x selbst gleich
denke ich mir unter x den Bogen mit
Radius 1. so wird $\sin x = x$ und die x^2
x^3 .. s. f. ganz verschwinden und es
bleibt $x = A_1 x$ also $A_1 = 1$

Ist aber x die Zahl der Grade so wird
nach Prop $180 : x = \pi : z$

$$z = \frac{\pi x}{180}$$

also wird $\frac{\pi x}{180} = A_1 x$ also $A_1 = \frac{\pi}{180}$
was anzunehmen ist.

ist nun $A_1 = 1$ wenn x der Länge des Bogens ist. So haben wir den Satz

A) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$

B) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$

Ein dritter Weg ist, wenn ich nur spitze Winkel annehme, zu ihnen die Sin u Cos von $(x+y)$ u $(x-y)$, welches auch spitze ∠ geben, berechne daraus nach obiger Weise die Resultate Reihen A) u B) für $\sin x$ u $\cos x$ entwickle, und da diese Reihen nur für x als spitzen ∠ gelten, so weise ich nun sie selber gelten für jeden ∠ x, weil dieser Begriff noch keine Beschränkung hatte. Und setze dann Werth solcher Sin u Cos. in die Formel, die ich für spitze ∠∠ angewendet habe, u sehe zu ob Identität herauskommt. Diesen Weg hat Ohm im II Th. d. Elem. Math. ausgesprochen. —

Die Differ: Rech: selbst

Dazu brauche ich folgende Reihen

1. den binomial Lehrsatz $(a+b)^m = a^m + m a^{(m-1)} b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} a^{m-2} b^2 + \ldots$

2. die Reihe für $a^x = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{x^2 (\log a)^2}{2!} + \frac{x^3 (\log a)^3}{3!} + \ldots$
   wo die $\log^e$ die natürlichen sind
   von der basis $e = 2,718 \ldots$

3. die Reihe $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

   weil $\log^e a = z$ so daß $e^z = a$
   also $\log^e e = z$ so daß $e^z = e$ wo $z = 1$ ist
   d. h. $\log e = 1$ ist. so ergibt sich die
   Reihe für e^x aus a^x.

sin = $1 - \cos^2$

4. die Reihe für $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$

5. die Reihe für $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

wo x nicht die Zahl der Grade sondern
Länge des Bogens bedeutet. — NB

6. die Reihe $\log(1+x) = \log(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots)$

Endlich brauche ich noch zu wissen daß

$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$ $\quad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2(\sqrt{-1})}$

$2 \sin x = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$ | $2 \cos x (\sqrt{-1}) = e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}$

$2 \sin x + 2 \cos x (\sqrt{-1}) = 2 e^{x\sqrt{-1}}$

70 woraus sich ergiebt daß $e^{\pm x\sqrt{-1}} = \cos x \pm \sqrt{-1}\sin x$

Diese Sätze sind nöthig um in das Capitel der Diff: Reihen einzugehen, wobei man sich gleich überzeugen daß es eigentlich keine Diff. R. giebt indem sich alles aus dem elementaren arithm: Kalkul hat. Der binomische Satz ist die Uebergang vom Endlichen zu den Reihen, indem er selbst für $x = (-\alpha)$ eine unendliche Reihe giebt, indem dann eigentlich alle [illegible] die unendliche Reihe bestimmt haben. —

Ist $f(x)$ eine beliebige Funct. x [illegible] statt x setze ich $(x+h)$ so wird $f(x+h)$ aus $f(x)$, so daß $f(x)$ die Eigenschaft hat daß $f(x+h)$ sich in eine Reihe entwickeln läßt nach potenzen von h,

So wenn $f(x) = x^m$ ist so wird $(x+h)^m$ eine solche Reihe nach bin: Satz —

Hier ist klar daß in der Reihe d. erste
Glied $f(x)$ sein muß. denn setze ich in
$f(x+h)$ $h=0$ so bleibt nur $f(x)$, und
allen Glieder die mit h affiziert sind fallen
weg.

man sieht schon aus dem Beispiel
$(x+h)^m$ ergiebt dann heißt d. erste
Glied x^m d.i. $f(x)$

Der 2te Ausdruck wird h der Coeff ist
nur unbestimmt den ich durch $df(x)$ bezeichne
weil d. Coeff von $f(x)$ abhängt - ist ergiebt
daß man die Reihe ergiebt so ergiebt daß
2te Glied darum soll h vorkommen als 1te Coeff also muß 2te sein.
diesen Coeff $df(x)$ nenn ich die Ableitung
der funct $f(x)$ nach x genommen

Jetzt stellen ich die I Aufgabe
Denken wir uns mittels $f(x) = A_1 x^m$
soll ich finden die Ableitung von $f(x)$
d.h. $df(x)$ zu finden
Geschehe statt x, $(x+h)$ zu bekommen
$A_1 (x+h)^m = A_1 (x^m + m x^{m-1} h + \ldots\ldots)$
woraus ergiebt daß $df(x) = m A_1 x^{m-1}$
dann ich ersehe wieder Ableitung aus den Coeff

12. [illegible] [illegible], an der [illegible] Reihe durch entwickeln, wenn ich statt x, $(x+h)$ setze.

<u>II Aufgabe</u> ist $f(x) = a^x$, die Ableitung zu finden.

Ich setze statt x, $(x+h)$ und verwandle den Ausdruck in eine Reihe nach h und der Coeff. v. h wird die Abl.

$$a^{x+h} = a^x \cdot a^h = a^x(1 + h(\log a) + \dots)$$

also ist $d f(x) = (\log a) a^x$

wenn $f(x) = a^x$

<u>III Aufg.</u> ist $f(x) = e^x$ wie ist die Abl.

Es ergiebt sich $d f(x) = e^x \log a$ aber $\log a$ ist hier $= 1$ also ist

$$d f(x) = e^x$$

<u>IV Aufg.</u> ist $f(x) = \log x$ die Abl. zu finden

dasselbe Verfahren —

$$\log(x+h) = \log x + \log\left(1+\frac{h}{x}\right) = \log x + \frac{h}{x} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} + \text{---}$$

der Coeff. v. h oder Abl.: ist also $\frac{1}{x}$

V Aufgabe ist $f(x) = \sin x$ die Abl. zu finden nach dem selben Verfahren.

$$\sin(x+h) = \sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h$$
$$= \sin x\,(1 - \ldots\ldots) + \cos x \cdot (h - \ldots\ldots)$$

der Coeff. nach h ist $\cos x$ das ist die Abl.

VI Aufg. ist $f(x) = \cos x$ die Abl. zu find.

$$\cos(x+h) = \cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h$$
$$= \cos x\,(1 - \ldots) - \sin x\,(h - \ldots)$$

so ist die Abl. $(-\sin x)$

Daraus bekommen wir also folgendes Schema.

$$f(x) = A_1 x^m = a^x = e^x = \log x = \sin x = \cos x$$
$$\partial f(x) = m A_1 x^{m-1} = a^x \log a = e^x = \frac{1}{x} = \cos x = -\sin x$$

Alles dies sind einfache Functionen die zusammengesetzten sind daraus entstanden. Es ist also die Aufgabe aus der Abl. der einf. Funct. die Abl. der

74. zu einzelnen Fun: zu bilden und dieß dann verschwinden, so ist die Diff. R. vorzüglich den Differenzen nichts anders als die Ableitungen zu finden.

Dazu dienen folgende Sätze

Aufgabe.

Man setze voraus daß alle funct: die fortan daß statt x (x+h) gesetzt sich eine Reihe bilden lässt nach pot. von x. —

Statt x setze ich funct: $\varphi(z)$ so wird
$f(x) = f(\varphi(z)) = \psi(z)$ eine Gl: von 2 verschiedenen formen derselben Bedeutung, und man mit formen fort Analysis zu thun. die Ableit von $f(x)$ ist $df(x)$. Nun soll ich von $\psi(z)$ die Ableit nach z suchen, die wird bezeichnet $d\psi(z)$. Nun ist die frage da $f(x) = \psi(z)$ ist ob

$df(x) = d\psi(z)$ gewesen sind sie verschieden, wie wird sich eins aus dem andern gefunden.

dass $df(x)$ nicht $= d\varphi(z)$ ist, zeigt sich
dadurch. für $f(x) = \varphi(z)$
Es kommt drauf an ob $f(x+h) = \varphi(z+h)$ sein
muss. Man sieht nun dass es nicht = ist.
denn setze ich in $x = \varphi(z)$ statt z
$(z+h)$ setze, so folgt nicht dass $x =$ wird
$x+h$ denn $\varphi(z+h) = \varphi(z) + d\varphi z\, h + \ldots$
und, $\varphi(z) = x$ daher wird $\varphi(z+h) = x + d\varphi(z)h + \ldots$
Also ist $f(x+h)$ nicht $= \varphi(z+h)$, denn
ich muss in x doch setzen, wenn nicht
x wird wenn ich statt z. $(z+h)$ setze
auch x wird nicht $x+h$, sondern $\varphi(z+h)$
oder dass die [illegible].
Setzt man $f(x+h)$. und $\varphi(z+h)$ entwickelt
nach h. Da die Reihen nicht = sind
so sind die einzelnen Glieder nicht =
also die Coeff auch nicht, also
auch die Ableitung nicht d.i. $df(x)$ ist
nicht $= d\varphi(z)$

Speciell nachzuweisen

es sei $f(x) = x^m$, $x = z^n$

$f(x) = x_1$, $\varphi(z) = z_1$
$f(x+h) = x_1 + m$ u $z_1 + m$
$fx + A_1 h + A_1 h^2 \ldots$

76. so ist $f(x) = (z^n)^m = z^{nm} = \varphi(z)$

setze ich statt $z = (z+h)$ und $x = (x+h)$

so wird $\varphi(z+h) = (z+h)^{mn}$

$f(x+h) = (x+h)^m$

$\varphi(z+h) = (z+h)^{mn}_{=z^{mn}} + mn\, z^{mn-1} h + \text{- - -}$

$f(x+h) = (x+h)^m_{=x^m} + m\, x^{m-1} \cdot h + \text{- - - - -}$

nun ist

$x^{m-1} = (z^n)^{m-1}$ d.h. $= z^{mn-n}$

so ist $mn\, z^{mn-1}$ nicht $m z^{mn-n}$ gleich

d.h. der Ableitungen sind nicht =.

$f(x) = f(\varphi(z)) = \varphi(z)_{x = z^n}$ positiver Beweis

$f(x) = z^{mn} = x^m$

$\varphi(z) = z^{mn}_{z^n}$ statt z $(z+h)$ wird

$\varphi(z) = z^{z^n}$

$\varphi(z) = \varphi(z+h)$ da $f(x) = \varphi(z)$ so ist

auch $\varphi(z+h) = f(x_{z+h})$ d.h. dann macht

auch x wird man ich statt z, $(z+h)$ setze

[weil $x = \varphi(z) = z^n$ und ich soll statt z, $(z+h)$ setzen

No 3

$$x_{z+h} = (z+h)^n \left[= z^n + nz^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2} \cdot h^2 + \dots \right.$$
$$= x + nz^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2} \cdot h^2 + \dots$$

(77.)

da $f(x) = x^m$ so ist $f(x_{z+h}) = (x_{z+h})^m =$

$$= (x + nz^{n-1}h + \dots)^m \;\; \| \;\; \varphi(z+h) = (z+h)^{mn} =$$
$$= \left((z+h)^n\right)^m = (x + nz^{n-1}h + \dots)^m$$

d. h. wenn ich statt z, $(z+h)$ setze, kann ich nicht statt x, $(x+h)$ setzen, sondern das was aus x wird, wenn ich in ihm statt z, $(z+h)$ setze. — also ist

$f(x) = \varphi(z)$ so ist nicht $f(x+h) = \varphi(x+h)$

Wie ist der Beweis der $df(x)$ nicht $= d\varphi(z)$ ist nun nicht auch dem andern gefunden? —

Es ist gegeben $\varphi(z)$ man soll finden $\partial\varphi(z)$.

Aufl. $\varphi(z+h) =$ ist $\varphi(z)$ muss gegeben sein $f(x) = f(\varphi(z))$ ~~[illegible]~~, wie würde ich die Reihe finden?

Da nun x = φ(z), so ist
$\varphi(z+h) = x_{(z+h)}$
und $\varphi(z+h) =$ einer Reihe wo das 1te Glied φz oder x ist, das zweite $\partial\varphi z\, h$ u. s. f.

Da man nun x wird wenn ich statt z, $(z+h)$ setze bezeichnen ich diß $x_{(z+h)}$ so wird

$x_{z+h} = \left(\varphi(z+h) = ~~[illegible]~~ = \varphi(z) + \partial\varphi z\, h + \ldots\right.$

oder kurz bezeichnet $\varphi(z+h) = x + H$

wenn $\varphi(z) = x$, das übrige $= H$ bezeichnet. $x = \varphi(z)$ und

der ~~[illegible]~~ $f(x) = \varphi(z)$

und der $(x+H)$ das ist was aus x wird wenn statt $z = (z+h)$ gesetzt so wird

$$\varphi(z+h) = f(x+H)$$

ich verwandle in Reihe beyde Glieder

$\varphi(z+h) = \varphi z + \partial\varphi z\, h + \ldots$

$$f(x+H) = f(x) + \partial f x \cdot H + (\ ) H^2 + (\ ) H^3 + \ldots$$

nun setze ich statt H den Werth so bekomme ich Reihe nach Potenz von h. so wird

$$\varphi(z+h) = f(x) + \partial f x \cdot (d\varphi z \cdot h + (\ ) h^2 + (\ ) h^3 + \ldots)$$
$+ (\ )\, H^2$ d. i. den Werth nach h, wo h schon

in Quadrat verkommt, und zur Änderg d. Abl. nicht gehört. den Ableitg ist also $\partial f(x) \cdot d\varphi(z) = d\varphi(z)$ woraus zu finden war

Ich sehe hier den scheinb. Widerspruch sobald ich $x = \varphi(z)$ setze dann wird $\partial f(\varphi(z))$ oder $\partial \varphi(z) \cdot d\varphi(z) = \partial\varphi(z)$ also $a \cdot b = a$.

Analogischer Beweis

$x^m = (z^n)^m = z^{mn}$ statt $z = \alpha + \beta$

wird $(\alpha+\beta)^{mn}$ = dann α^n weil weil ich wird, wenn ich statt z, $\alpha+\beta$ setze. Aber $\alpha = z^n$ also $= (\alpha+\beta)^n$

mithin wird

$$((\alpha+\beta)^n)^m = (\alpha+\beta)^{mn}$$ oder $\alpha = x$ und $\beta = h$

$$((x+h)^n)^m = (x+h)^{mn}.$$

Beispiele von Abl. zu finden

Zu finden $\partial(x^3)$ das ist weil $\partial(x^m) = m \cdot x^{m-1} = 3x^2$

ist $x = z^4$ wird $\partial(x) = \partial(z^4) = 4z^3$

und $x^3 = (z^4)^3 = z^{12}$ und $\partial(z^{12}) = 12z^{11}$.

Ist nun $f(x)$ beliebige funct. wo $x = \varphi(z)$ so daß $f(x) = f(\varphi(z)) = \varphi(z)$ so ist

$$\partial\varphi(z) = \partial f(x) \cdot \partial\varphi(z)$$

80. Ist $f(x) = x^3$ und $x = z^4$ so ist $\varphi(z) = z^4$ und $\varphi(z) = z^{12}$

also ist $12z^{11} = 3\cdot x^2 \cdot 4z^3$ nach richtig

Dies ist weil $x = z^4$ also $3x^2 = 3z^8$ und

$3z^8 \cdot 4z^3 = 12z^{11}$.

Allein 2 Ausdrücke können gleich sein ohne daß ihre Abl. = sind denn ist $f(x) = \varphi(z)$ so ist $d\varphi(z)$ auch $= df(x)$ – also bei Abl. kommt es nicht auf den Werth der Größe der Ausdr. sondern nur auf die Form [illegible] deshalb daß 2 Ausdrücke = sind sind sie der Form nach von einander verschieden. Ganze Algebra dreht sich nur um die Form. und dies wird also bei den Ableitung nicht [illegible].

Ist $x^3 = z^{12}$ und $d(z^{12}) = 12z^{11}$ so soll

$d(x^3) = 12z^{11} = 3z^8$ (also

$12z^{11} = 3z^8$ oder

$4z^3 = 1$

welcher Widerspruch

daher kann ich einen Ausdruck nicht für einen andern nehmen, wenn sie gleich sind – wenn es nicht nur den

(weil $d(x^3) = 3x^2$ da $x = z^4$ so ist $3x^2 = 3z^8$

Geschäft sondern um die Form zu sehen 81.
ist.
Die Reihe scheint zu umständlich zu sein
um den Formen nicht zu verwechseln
daher ist es zweckmäßig die Formen
zu bezeichnen. daher folgendes
ist f(x) funct: v. x. und dieselbe einen
Ausdr: vorstellt, der wieder beliebige
Buchstaben enthält, und wenn ich
statt x, andern Ausdruck setze wo
wieder verschied: Buchst: vorkommen,
so kann ich die Abl. von f(x) nach x, nach
y, nach z abl. verlangen. Will ich
Abl. nach x, so muß ich statt x, (x+h)
setzen, will ich die Abl nach y, so
muß ich statt y, (y+h) setzen. u. s. f.
in jedem Falle ist die Abl: anders.
daher will ich das durch zweckmäßige
Bezeichnung angeben. —
Hiezu ist x notwendig, weil ich dafür
alles setzen kann und setze die funct
mit f und setze die Abl nach f nach x = $\frac{d}{x}f$
die nach y, $\frac{d}{y}f$ u. s. f. — Es versteht sich
daß wenn ich Abl. nach x verlange, in der
funct: x vorkommen muß so daß ich statt x, x+h gesetzt, eine Abl

$fx \quad x=(\varphi z) \; f\varphi$

[illegible] die bekannten

82. Abl. x^3 nach x ist $3x^2$ also hier wird nicht mehr $\partial(x^3)$ sondern $\frac{\partial}{x}(x^3)$ und $12z^{11}$ ist Abl. z^{12} nach z und diese ist also $\frac{\partial}{z}(z^{12})$. dadurch wird $\frac{\partial}{z}(z^{12})$ und $\frac{\partial}{x}(x^3)$ unterschieden obenweil z und x einerlei = gesetzt [illegible] können — Setzt man $x = z^4$

so ist $\frac{\partial}{x}x = 1$ welches nicht gleich $\frac{\partial}{z}(z^4) = 4z^3$ sondern $\frac{\partial}{z}x = 4z^3$

daher wird der Widerspruch in $\partial f x = \partial f x \cdot \partial \varphi z$ als wenn $a = a.b$ wären, sich auszugleichen haben.

Dies ab geht über in $\frac{\partial}{z} f x = \frac{\partial}{x} f x \cdot \frac{\partial}{z} \varphi z$.*

Ist also $y = (x)$ und $x = (z)$ so wird $\frac{\partial}{z} y = \frac{\partial}{x} y \cdot \frac{\partial}{z} x$ entsprechend aus $\partial \varphi(z) = \partial f(x) \cdot \partial \varphi(z)$

dies ist der Hauptgrundsatz der Diff. Rechn.

Weil man $f(x) = \varphi(z)$, $\partial f(x)$ nicht $= \partial \varphi(z)$ wenn durch die Abl. nach x, hier nach z gemeint ist, so ist $\frac{\partial}{x} x$ nicht $= \frac{\partial}{z} z$ wesshalb $\frac{\partial}{z} x = \frac{\partial}{x} z$ wie ab die folgenden Beispiel zeigt — — — —

Weil $\frac{\partial}{x} x$ gefunden wird wenn ich statt x, $x+h$ setze in eine Reihe entwickle nach h und Coeff von h nehme

$(x+h)^1 = x^1 + 1x^{1-1}h + \ldots$
$= x + h + \ldots$

die Abl. also $= 1$.

wir wollen ihn mittelst dieser Form be- 83.
weisen

$\frac{\partial}{z}y$ heißt ich soll statt z z+h setzen die Reihe nach h entwickeln und den Coeff. von h nehmen. Aber setzt man ich statt z = z+h
dann geht x in x + ℌ über.

denn (z+h) = x_{z+h} wo daraus Reihe ist, wovon 1tes Glied x die anderen ℌ sind

aber ℌ = $\frac{\partial}{z}x . h + - - - -$

wenn x in x + ℌ übergeht so geht
y in eine Reihe über wovon 1tes Glied y
das zweite mit ℌ multipl. und der
Coeff. $\frac{\partial}{x}y$ also = $y + \frac{\partial}{x}y ℌ + - - -$
verwandelt in Reihe nach Potenzen h
wird = $y + \frac{\partial}{x}y \cdot \frac{\partial}{z}x . h + - - - -$
also Abl. von y nach z ist $\frac{\partial}{x}y . \frac{\partial}{z}x$.

---

* unser Satz war eigentlich so I) $d\psi(z) = \partial f x . d\varphi(z)$ entstanden aus
der Gl.: $f(x) = f(\varphi(z)) = \psi(z)$. da nun $x = \varphi(z)$ so wird $df(x) = df(\varphi(z))$
$= d\psi(z)$ also in I) $d\psi(z) = d\psi(z) . d\varphi(z)$ aber
aber ~~[illegible]~~ $d\psi(z)$ und $d\varphi(z)$ ist verschieden weil das eine
$d\psi(z)$ als $= df(x) = \frac{\partial}{x}(x)$ und das andere
$d\varphi(z)$ als $= df(\varphi(z)) = \frac{d}{z}f(\varphi(z)) = \frac{\partial}{z}(x)$ also der Satz
wird $\frac{\partial}{z}(x) = \frac{\partial}{x}(x) . \frac{\partial}{z}z$

Folgesätze

Ist $y = (x)$ u. $x = (z)$, so daß y ursprünglich einer function von x wäre, und dann in einer funct: von z übergienge so kann ich auch Abl. von y erzeugen der ist nach obigem

$$\frac{d}{z}y = \frac{d}{x}y \cdot \frac{d}{z}x.$$

aber der y als funct von x von x abhängig ist also variabel, und x eine funct von (z) ist also von z abhängig also auch variabel so ist nur z absolut frei, und y u. x sind von ihm abhängig dieses kann ich aber durch so bezeichnen.

$$dy = \frac{d}{x}y \cdot dx$$

Ist z ein Quadrat der x u. ü y in sich enthält, und x u. y denken ich selbst als funct. von v, so ist auch z eine funct von v. und ich kann

um $\frac{d}{v}z$ zu bezeichnen. dann ist $= \frac{d}{x}z \cdot \frac{d}{v}x + \frac{d}{y}z \cdot \frac{d}{v}y$

dieser Satz kann so geschrieben werden

$$\text{II} \quad dz = \frac{d}{x}z \cdot dx + \frac{d}{y}z \cdot dy$$ und dieser

Satz ist der 2te Grundsatz.

Es versteht sich dass wenn x (y) sonst v (x)

und bei x = (v) denke ich mir [illegible]

als dx [illegible] und v [illegible], absolute,

oder variable relatio.

Der III Hauptsatz ist ist $z = |x, y, u|$

und x und y, und u funct: von v sind

so ist z auch (v) dann ist.

$$\text{III} \quad \frac{d}{v}z = \frac{d}{x}z \cdot \frac{d}{v}x + \frac{d}{y}z \cdot \frac{d}{v}y + \frac{d}{u}z \cdot \frac{d}{v}u$$ oder

$$\text{III} \quad dz = \frac{d}{x}z \cdot dx + \frac{d}{y}z \cdot dy + \frac{d}{u}z \cdot du$$

Analog geht dies so fort. —

Mit diesen Sätzen ist die Diff. Rechn. begründet

Wir beweisen den II Satz.

Es wird so bezeichnet wie I Theil.
Wir wollen $\frac{d}{v}Z$ finden wo gehen in Z; statt $v = v+h$. da aber in Z v nicht vorkommt so ist die Frage, was wird x, und was wird y wenn $v = v+h$ ist. Ist $z = f(x, y)$ so wird $Z_{v+h} = f(x+\mathfrak{A}, y+\mathfrak{A}_1)$ nach dem obigen nun ist

$\mathfrak{A} = \frac{d}{v}x \cdot h + \ldots$ oder der v gedacht $= dx \cdot h + \ldots$

$\mathfrak{A}_1 = \frac{d}{v}y\, h + \ldots \qquad = dy\, h + \ldots$

Nun ~~setze ich statt~~ muss ich das neue Z_{v+h} in Reihe nach Potenzen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ zunächst ordnen, wo dann statt $\mathfrak{A}$, und $\mathfrak{A}_1$ die Werthe gesetzt werden und wo Reihen nach Potenzen von h bekommen. —

Es ist also die Frage $f(x+\mathfrak{A}, y+\mathfrak{A}_1)$ in eine ~~Reihe~~ geordnete Reihe zu verwandeln.

Die übrigen Grade brauch ich nicht, und sehe zu was aus dem

$\frac{dz}{v}$ zu mach. wenn $z = (x, y)$ mit $x = (v)$, $y = (v)$

$(v+h) = (v) + d(v)h + \ldots$

$x + \frac{dx}{v}h + \ldots = x + H$

$= y + \frac{dy}{v}h + \ldots = y + H_1$

also $z_{v+h} = f(x + H, y + H_1) = (x) + d(x)H + \ldots$

$+ (y) + d(y)H_1 + \ldots$

$= f(x, y + H_1 + H) = (x) + (y) + d(x)H + d(y)H_1$

$= (x, y) + d(x)\frac{dx}{v} + d(y)\frac{dy}{v}$

$= (x, y + H_1) + d(x, y + H_1)H + \ldots$

$= \left(x, y + \left(\frac{dy}{v}h + \ldots\right)\right) + d\left(x, y + \left(\frac{dy}{v}h + \ldots\right)\right)\frac{dx}{v}$

$\cdot\frac{dy}{v} \quad + \quad dz \cdot \frac{dx}{v} + \frac{dy}{v}\cdot\frac{dx}{v}$

$dz \cdot \frac{dx}{v}$

Anmerkung.

Ist $f(x) = f(\varphi(z)) = \psi(z)$, so ist

$$\partial\psi z = \partial f x \cdot \partial\varphi(z) = \partial\psi(z)\cdot\partial\varphi(z)$$

oder $\frac{\partial}{z}\psi z = \frac{\partial}{x}\psi z = \frac{\partial}{z}\varphi z$

denn das $\partial\psi z$ als entstanden gedacht aus $\partial f(\varphi(z)) = \partial f(x)$ ist eine function von x also ist die Ableitung darnach x.

oder kürzer bezeichnet: $\partial z = \frac{\partial}{x} z \cdot \partial z$

Wir wollen daraus den selben Satz in der abgekürzten Form herleiten

ist $y = (x)$ und $x = (z)$ so ist

$$\partial y = \frac{\partial}{x} y \cdot \partial z$$

da aber y eine funct von z ist so wird auch $\partial(z) = \frac{\partial}{x}(z)\cdot\partial(z)$.

Ist $y = (x)$ und $x = (z)$ dann ist auch y eine funct von z und da z das absolute invariable ist, als nur relative functo von x, und y, aber von keinem andern Buchstaben so kann ich ihn eigen die Ableitung nach y nach dem invariablen z oder ein $\frac{\partial}{z} y$

so, daß die Abl: durch die Ableitung von (x) und (z) ausgedrückt werde.

Ich finde $\frac{d}{z}y$ wenn ich in y statt, z zunächst (z+h) setze und wenn nach Th. entwickle: und dann Coeff. von h nehme.

Nun ist y zunächst = (x) und erst x = (z) also ich muß zeigen was wird aus x wenn ich statt z, z+h setze, bezeichne ich den neuen x durch x_{z+h} so wird es = .

$$x_{z+h} = (z+h) = (z) + \frac{d}{z}(z)h + (\ )h^2 + \dots = x + \left[\frac{d}{z}x\,h + \dots\right.$$

$$= x + \{\mathfrak{A}\}$$

also $(x) = (x+\mathfrak{A})$ die Frage ist nun wenn $(x) = (x+\mathfrak{A})$ was wird aus y das $= (x)$ ist.

aber $(x+\mathfrak{A}) = (x) + \frac{d}{x}(x)\,\mathfrak{A} + (\ )\mathfrak{A}^2 + \dots$

$$= y + \frac{d}{x}y\,\mathfrak{A} + \dots \quad \text{da } \mathfrak{A} = \frac{d}{z}x\,h + \dots$$

$$= y + \frac{d}{x}y\cdot\frac{d}{z}x\cdot h + (\ )h^2 + \dots$$

dieses also ist der Werth für y wenn x in $x+\mathfrak{A}$, oder z in (z+h) übergeht. Wir sehen zugleich daß also die

$\frac{d}{z}y = \frac{d}{x}y\cdot\frac{d}{z}x$ oder $dy = dy\cdot dx$ [gestrichen]. dieser Abl. ist ausgedrückt durch die Abl. von (x) und (z) weil $\frac{d}{x}y$ aus $\frac{d}{x}(x)$ und $\frac{d}{z}x$ aus $\frac{d}{z}(z)$ entstand

II Aufgabe.

90. ist $z = (x, y)$ und $x = (v)$ und $y = (v)$
dann ist z auch eine funct von v indem
v das relative invariable ist, ich kann also
fragen nach $\frac{\partial}{v} z$ ausgedrückt durch
den Abl von (x und y).
Ich soll also in (x und y) statt v, $(v+h)$ setzen
aber da $x = (v)$ und $y = (v)$ so ist die frage
was wird aus x und y

$$x_{v+h} = (v+h) = (v) + \frac{\partial}{v}(v) h + (\ ) h^2 + \ldots$$
$$= x + \frac{\partial}{v} x\, h + \ldots$$
$$= x + \mathfrak{A}$$

und
$$y_{v+h} = (v+h) = (v) + \frac{\partial}{v}(v) h + (\ ) h^2 + \ldots$$
$$= y + \frac{\partial}{v} y\, h + \ldots$$
$$= y + \mathfrak{A}_1$$

mithin $(x, y) = [x + \mathfrak{A}, y + \mathfrak{A}_1]$. Nun ist nun
die funct $[x + \mathfrak{A}, y + \mathfrak{A}_1]$ in eine unendliche
Reihe nach potenzen von $\mathfrak{A}$ u. $\mathfrak{A}_1$ zu entwickeln
dann setzt ich dann statt $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{A}_1$ ihre Werthe
so bekomme ich eine Reihe welche nach h und dieser
wird $=$ sein z_{v+h} d. h. dem z wenn ist

an ihre Stelle v, $v+h$ setzen. ——
Ich kann nun aber $[x+\mathfrak{A}, y+\mathfrak{A}_1]$ als
eine funct von $x+\mathfrak{A}$ betrachten, in
welcher, wenn ich sie in eine Reihe nach
$\mathfrak{A}$ entwickle, jeder Coefficient dieser Reihe eine functionis
außer [illegible] anderen Buchstaben
noch (eine function von) $y+\mathfrak{A}_1$. Ich bekomme also

$$z_{v+h} = [x+\mathfrak{A}, y+\mathfrak{A}_1] = (x, y+\mathfrak{A}_1) + \frac{\partial}{x}(x, y+\mathfrak{A}_1)\mathfrak{A} + (\;)\mathfrak{A}^2 + \ldots$$

setze ich statt $\mathfrak{A}$ den Werth $\left[\frac{\partial}{v} x h + \ldots\right.$
und statt $\mathfrak{A}_1$ den Werth $\left[\frac{\partial}{v} y h + \ldots\right.$ so wird

$$z_{v+h} = \left(x, y + \left[\frac{\partial}{v} y h + \ldots\right]\right) + \frac{\partial}{x}\left(x, y + \left[\frac{\partial}{v} y h + \ldots\right]\right)\left[\frac{\partial}{v} x h + \ldots\right] + \ldots$$

daraus suche man den Coeff von h nur zu entwickeln

$$\left(x, y + \frac{\partial}{v} y h + \ldots\right) = (x, y) + \frac{\partial}{y}(x, y)\frac{\partial}{v} y h + \ldots$$
$$= z + \frac{\partial}{z} z \cdot \frac{\partial}{v} y h + \ldots$$

Anwendungen der Formeln

die I Formel kann man sich mit der $\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}$ verbinden nehmlich $\frac{\partial}{c} a = \frac{\partial}{b} a \cdot \frac{\partial}{c} b$ oder

$\partial a = \frac{\partial a}{b} \partial b$

Sum $\frac{\partial}{v}\left(v^2 \cdot \sin v\right)$ zu finden. Setze

$v^2 = x$
$\sin v = y$ so ist $\frac{\partial}{v}(x \cdot y)$ zu suchen das ist der Fall für II Formel $z = f(x, y)$

$dz = \frac{\partial}{x} z \cdot dx + \frac{\partial}{y} z\, dy.$

darum ist $\partial x\,(x \cdot y) = y$. oder die Form
$\partial(A_1 x^m) = m A x^{m-1}$ und $x \cdot y$ ist hier
$y \cdot x^1 = 1 \cdot y x^0 = y$.

also $\frac{dz}{x} = y$ eben so ist $\frac{dz}{y} = x$ also

$d(xy) = y \cdot dx + x \cdot dy$

$dx = 2v$ nach Formel $d(x^m) = m \cdot x^{m-1}$

$dy = \cos v$. also

$d(v^2 \sin v) = \sin v \cdot 2v + v^2 \cos v$

2do $\frac{\partial}{v}(\text{Tng } v)$ zu finden.

Was ist die Tangente? nach analyt. Gründen ist
$\frac{\text{Sin } v}{\text{Cos } v} = \text{Tng } v.$ also ist $\frac{\partial}{v}\left(\frac{\text{Sin } v}{\text{Cos } v}\right)$ zu finden
Sin v sei = x, Cos v = y also wird $\frac{\partial}{v}\left(\frac{x}{y}\right)$ zu finden
dies ist die Anwendung der formel II.
$\frac{\partial}{x} z$ ist nach Diff der Abls $\frac{1}{y}$. oder nach
der formel $\partial\left(\frac{1}{y} \cdot x^1\right) = 1\frac{1}{y} x^0 = \frac{1}{y}$
$\frac{\partial}{y} z$ durch eine Dif. es wird als $\frac{x}{y}$
$\frac{x}{y+h} = \frac{x}{y} - \frac{x}{y^2} h + - -$ also ist $\frac{\partial}{y} z = -\frac{x}{y^2}$
durch Anwendg der formel $\partial\left(\frac{x}{y}\right) = \partial(x \cdot y^{-1}) = -1 x \cdot y^{-2} = -\frac{x}{y^2}$
also $\partial\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\partial x}{y} - \frac{x \cdot \partial y}{y^2}$

$\partial x = \text{Cos } v$
$\partial y = -\text{Sin } v$ also $\partial(\text{Tng } v) = \frac{(\text{Cos } v)^2 + (\text{Sin } v)^2}{\text{Cos } v^2} = \frac{1}{\text{Cos } v^2}$

dies sind speciellen formel Produkte u. Quot: zu differenziren

Die II formel macht auch hier zusammen-
gesetzten formel III, u. IV formel, weil
ein Verhältn. zu 2 Dunklern ist.

Morgen ein Beispiel.

Zuerst der Ableitung

3^{tio} $\partial\left(\frac{v^2 \cdot \log v}{Tng\, v}\right)$ zu finden

$\partial\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \cdot \partial x + \left(-\frac{x}{y^2}\right)\partial y$

nehmen ich aber $\partial\left(\frac{x \cdot y}{u}\right)$ so würde ich formel III

und bekommen $\partial z = \frac{y}{u}\partial x + \frac{x}{u}\partial y - \frac{xy}{u^2}\partial u$

$\partial x = 2v$
$\partial y = \frac{1}{v}$ und dann substituirt werden
$\partial u = \frac{1}{\cos v^2}$

4to $y = \sqrt{1 - ax^2} = \sqrt{z}$ d. h. $z = 1 - ax^2 = 1 - u$
d. h. $u = ax^2 = aw$
d. h. $w = x^2$

den Abl von y drückt ich aus in den von
z, die nach z in die nach u, die nach w.
Nach der Form I $\partial y = \frac{\partial}{z} y \cdot \partial z$.
Nun ist $\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}$ mir $\frac{\partial y}{z} = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}$

∂y also $= \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \cdot \partial z$

$\partial z = \frac{\partial}{u} z \cdot \partial u$

$\frac{\partial}{u}(1-u)$ direkt gefunden
$(1-u)-h$ die Abl ist also -1 daher

$\partial z = -1 \cdot \partial u$

$du = \frac{du}{dw} \cdot dw$

$\frac{d(aw)}{dw}$ der aw + ah der Abl. also a daher

$du = a \cdot dw$. den Abl. von u findet man

auch den Abl. von w haben

dw ist aber $= 2x$, so ist [illegible]

$du = 2ax$
$dz = -2ax$
$dy = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2ax) = \frac{1}{2}(1-ax^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2ax) = -\frac{ax}{\sqrt{1-ax^2}}$

Lehrsatz

Ist $y = f(x)$ und man statt x, $(x+h)$ setzen und [illegible] nach h entwickeln

so wird

y_{x+h} [illegible]

$$y_{x+h} = y + dy\,h + d(dy)\frac{h^2}{2!} + d(d(dy))\frac{h^3}{3!} + \dots$$

$$= y + dy\,h + d^2y \cdot \frac{h^2}{2!} + d^3y \cdot \frac{h^3}{3!} + \dots$$

wird [illegible]

Bew. [illegible]

[illegible]

$$y_{x+h} = y + A_1 h + A_2 \frac{h^2}{2!} + A_3 \frac{h^3}{3!} + \dots$$

$$= y + f'(x)\,h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \dots$$

[illegible]

[illegible] $(x+k)$ [illegible]

$h+k$ [illegible] h [illegible]

[illegible] $f(x+k)+h$ [illegible] $f(x+h+k)$ [illegible]

[illegible]

$$f(x+k)+h = y + f'x\,h + f^2(x)\frac{h^2}{2!} + \dots \quad + f'(x+k)\,h \text{ [illegible] } f'(x) + \partial f'(x)\,k\,h + \dots$$

[illegible] y [illegible]

$h=0$ [illegible] $y_x = y$

[illegible] $f'(x)$, $f^2(x)$ [illegible]

[illegible] x [illegible]

[illegible] $f'(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$ [illegible]

[illegible]

$$f(x+k)+h = y_{x+k} + f'(x+k)\,h + f^2(x+k)\frac{h^2}{2!} + \dots$$

$$y_{x+k} = y + \partial y\,k + (\ )\,k^2 + \dots$$

$$f'(x+k)\,h = f'(x)\,h + \partial f'(x)\,k\,h + (\ )\,k^2 h + \dots$$

$$f^2(x+k)\frac{h^2}{2!} = f^2(x)\frac{h^2}{2!} + \partial f^2(x)\,k\frac{h^2}{2!} + (\ )\,k^2\frac{h^2}{2!} + \dots$$

Alles gilt wenn dx constant ist. 113-

2ten Fall

diff: das Diff zu finden wenn dx variabel ist. ich muss das dx unstreitig wachsen lassen weil x der (v) war so dass dx dem Zuwachs der erlangt hat. Das ist nämlich das Diff wenn dx unconstant ist.

Alles vorige gilt bei $dy = p\,dx$ aber dx ist nicht förmlich Zuwachs, weil $x = (v)$ und v und dv wächst, also ist dx selber wieder $= r.dv$ wo $r=(v)$ ist (weil $\frac{dx}{dv} = r = \frac{\partial}{v} x$) folglich ist

$dy = p.r.dv$. (das ist der Satz $\frac{\partial}{v} y = \frac{\partial}{x} y . \frac{\partial}{v} x$)

Nun will ich das 2te Diff. finden, nämlich ich das was darum wird wenn ich v wachsen lasse um dv weil x variabel ist. dadurch ist dv constant aber r wächst um dr also $dx = r.dv$ wird

$d^2y = dp.dx + p.d^2x$

also d^2y wenn dx constant ist =
= $dp.dx$, ist dx variabel so
wird = $dp.dx + p\,d^2x$, weil die
Basis der Diff. Rech. = p

So wird der Lehre schwer wenn man [illegible]
überflüssig behandelt.

Der Diff. Rech. hat nie mit den Differentialen zu thun, nur mit dem Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, aber dessen = p setzt und so $dy = p.dx$
stellt, ist das [illegible]. Da
nun $\frac{dy}{dx}$ eine Abl. ist, so folgt
daß der [illegible] mit [illegible] Ablz Rech.

Alle Forschungen der Natur sind
Resultate der [illegible] Kräfte
oder Folgerungen der quantitativen Verbindungen
nach dem Calcul, der qualitativen
Kräfte. Dieses die Höhe d. Mathem

Anmerkung O

Alle bekannten Formeln für die Ableitung [illegible] wo d vorkommt, gelten auch für partielle d, d Zeichen.

Wenn man die Abl. findet, so muss man nach Abl. einer Größe, auch Abl. and. Größen zurückgehen, bis wir zu [illegible] Abl. kommen z. B. $d(\cos x)$ zu fin.

$d\left(\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)$ der Nenner ist Const: nach f. $d(Ay+B) = A\,dy$

also nur $\frac{d(e^{xi}+e^{-xi})}{2}$. der Zähler ist Summe

und gibt $\frac{d(e^{xi}) + d(e^{-xi})}{2}$

$d(e^{xi}) = e^{xi}\,d(xi)$ und $d(e^{-xi}) = e^{-xi} \cdot d(-xi)$

$d(xi) = i.d(x)$ und $d(-xi) = (-i).dx$

so wird $\frac{e^{xi}\,i.dx + e^{-xi}(-i)dx}{2} = \frac{(e^{xi}\cdot i - e^{-xi}\cdot i)dx}{2}$

$= \frac{(e^{xi}-e^{-xi})\,i\,dx}{2}$ = durch i mult. gibt $i^2 = -1$

also wird $= -\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\,dx = -\sin x . dx.$

Dies kann partielle d, d Zeichen, wenn ich alles nach dritten Variable betrachte.

II.do $d(\text{arc. sin } x)$ zu finden

Es ist der bogen y der die Eigenschaft hat daß der sinus von y genau die Größe x giebt. So wie der sinus vom arcus abhängt, so ist umgekehrt. also ist arcus funct(x). Ich muss also die Zusammenhänge erst sehen und zu ableiten. Jeder Ausdruck ist eine neue Funct.

Ist $\text{arc sin } x = y$ so ist $\sin y = x$. um y in x auszudrücken so muss ich Acht geben. da $x = \sin y$ so ist $x = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}$, woraus y zu finden ist.

Ich nenne $e^{yi} = z$ und e^{-yi} wird dann $\frac{1}{z}$

so wird $x = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$ die Gl. wird quadr. nach z aufgelöst. und wir bekommen

$$z^2 - 2ix.z - 1 = 0$$

$$z = ix \pm \sqrt{1 - x^2} = e^{yi} \text{ daher}$$

$$yi = \log\left(ix \pm \sqrt{1-x^2}\right)$$

$$y = \frac{1}{i}\log\left(ix \pm \sqrt{1-x^2}\right)$$ die function ist also da

denn da $y = \text{arc sin } x$ so ist

$$\partial(\text{arc sin } x) = \partial\left(\frac{1}{i}\cdot\log\left(ix \pm \sqrt{1-x^2}\right)\right)$$ [illegible]

[illegible] ist zu [illegible] Product [illegible] $\partial(Ay) = A\cdot dy$ ~~$y\partial x + x\partial y$~~ [illegible]

[illegible] $= \frac{1}{i}\,\partial\left(\log\left(ix \pm \sqrt{1-x^2}\right)\right)$ [illegible] $\partial(\log x) = \frac{\partial x}{x}$

$$= \frac{1}{i}\cdot\frac{\partial\left(ix \pm \sqrt{1-x^2}\right)}{ix \pm \sqrt{1-x^2}}$$ [illegible] Summe [illegible]

$$= \frac{1}{i}\,\frac{i\partial x \pm -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot x\,\partial x}{ix \pm \sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{i}\cdot\frac{\partial x\left(i \mp (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot x\right)}{ix \pm \sqrt{1-x^2}}$$

[illegible] $\partial\sqrt{1-x^2} = \partial\left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot \partial(1-x^2)$

[illegible] $\partial(1-x^2) = 0 - (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\partial x$

[illegible] $\mp(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ multiplicirt

$$= \frac{1}{i}\,\frac{i\cdot\sqrt{1-x^2} \mp x}{\left(ix \pm \sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1-x^2}}\,\partial x$$ [illegible] i multiplicirt

[illegible] $\frac{1}{i} = -i$ [illegible] $\frac{\sqrt{1-x^2} \pm ix}{\left(ix \pm \sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1-x^2}}\cdot\partial x$

$$= \frac{\pm\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$ [illegible]

[illegible] $e^{\pm yi} = \cos y \pm i\sin y$ [illegible]

[illegible] $y = \frac{1}{i}\log(\cos y \pm i\cdot\sin y)$ [illegible] $\sin y = x$ [illegible] $\cos y = \sqrt{1-x^2}$

[illegible]

118 Um den Abl. zu finden ist nämlich der Bog. so. ist $\arc\sin x = y$ (der Bogen) so ist
$x = \sin y$

den Abl. von x [illegible] ist $dx = \cos y \cdot dy$

also $dy = \frac{dx}{\cos y} =$ und $\cos y = \sqrt{1-x^2}$

III Beispiel

$d(\arc\cos x)$ zu finden

ist $\arc\cos x = y$ (ein Bogen) so ist $\cos y = x$
und oben ist gefunden [illegible]
[illegible] $y = \frac{1}{i}\log(x + i\sqrt{1-x^2})$, so ist

$$dy = \frac{1}{i}\,\frac{1 + i\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{x + i\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{i}\,\frac{1 - i(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}x}{x + i\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

die $\sqrt{1-x^2}$ weg multipl $= \frac{1}{i}\frac{(\sqrt{1-x^2} - ix)\cdot dx}{x + i\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}}$

mit i [illegible] der $i^2 = -1$ giebt

$$dy = -\frac{x + i\sqrt{1-x^2}}{x + i\sqrt{1-x^2}\,(\sqrt{1-x^2})}\,dx = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

kürzer

$x = \cos y$

$$dx = d(\cos y) = -\sin y \cdot dy = \quad dy = -\frac{dx}{\sin y}$$

$$= \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Die Log: sind hier natürliche; wollen wir den Log nach tabell. Log. zu finden, so reducirt man die letztern auf den vorstehen.

Algebr. Entwickelung des [illegible]

arc Sin x

B

arc Cos x

A

x

$\text{arc Cos}\, x + \text{arc Sin}\, x = \frac{1}{2}\pi$ also

$d(\qquad\qquad) = 0$ also

$d\, \text{arc Cos}\, x = -d(\text{arc Sin}\, x)$, aber

die Werthe sind falsch. Weil arc Cos x unbestimmt viele Werthe, nemlich alle $\pm 2n\pi \pm$ arc [illegible], weil auch unsere Betrachtung hergenommen der Log wurde viele Werthe hat.

IV^t Lehrsatz

$d(\text{arc Tang}\, x)$ zu finden

ist $\text{arc tg}\, x = y$ (Bogen) so ist $\text{tg}\, y = x$.

$$\text{tg}\, y = \frac{\text{Sin}\, y}{\text{Cos}\, y} = \frac{(e^{yi} - e^{-yi}) \cdot 2}{2i \cdot (e^{yi} + e^{-yi})} = x$$

allein die Gl: sind transc: aber werden algebraisch, wenn man statt y aber $e^{yi} = z$ finden will. Sich also e^{yi} zu finden

Denn sonst ist $yi = \log$ von dem gefundenen. In der Trig. sind hingegen transcend. ich finde den nicht x, sondern $\sin x$. u. s. f. Ich setze statt $\sin x$. $\sin x$ u. $\cos x$ da ich 2 verhält. habe so muss ich 2te Gleich. nehmen die ist $\sin x^2 + \cos x^2 =$ und eliminiren die nöthigen

Aus der Gl. $e^{yi} = \cos y + i \sin y$ folgt.   Auch so.

$$y = \frac{1}{i} \log (\cos y + i . \sin y).$$ Da

$\frac{\sin}{\cos} = tg$ und $\sin^2 + \cos^2 = 1$ so ist

$$\sin = \cos . tg.$$ daher
$$\cos^2 . tg^2 + \cos^2 = 1$$
$$\cos^2 (1 + tg^2) = 1$$
$$\cos = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2}}$$

und $\sin = \frac{tg}{\sqrt{1+tg^2}}$ da $tg = x$ ist so ist. $\cos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\sin = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ daher

$$y = \frac{1}{i} \log \left(\frac{1 + ix}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

Da nun $1+x^2=(1+ix)(1-ix)$, da man $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. 1^2+x^2 ist nun $=1^2-i^2x^2$, weil $i^2=-1$.

daher ist $\sqrt{1+x^2}=\sqrt{(1+ix)(1-ix)}$

und $1+ix=\sqrt{(1+ix)^2}$. zwei √ werden dividirt wenn man den Rad: dividirt und das √zeichen gegen giebt so erhalten wir

$$y=\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{(1+ix)^2}{(1+ix)(1-ix)}}=\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+ix}{1-ix}}$$

Log √ ist = dem Log des Radicanten durch Wurzelexpon. dividirt wird also — denn $\log\sqrt[m]{a}=\frac{\log a}{m}$

$$y=\frac{1}{i}=\frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)$$

Noch anders

$$\left.\begin{aligned}e^{yi}&=\cos y+i\sin y\\ e^{-yi}&=\cos y-i\sin y\end{aligned}\right\}\text{ dividirt durch einander}$$

$$e^{2yi}=\frac{\cos y+i\sin y}{\cos y-i\sin y}=\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,y}{1-i\,\mathrm{tg}\,y}$$

man ist Zähler und Nenner durch Cos y dividire $=\frac{1+ix}{1-ix}$

also $y=\frac{1}{2i}\log\frac{1+ix}{1-ix}$

Arbeit die Anwendung

den gefundenen Ausdr. sich zu bedienen um y in unendl. Reihe zu entwickeln nach Potenzen von x, wo y den Bogen x die Tang. so kann ich den Bog. y in Reihe entwickeln nach Potenz seiner Tang: [illegible]

ist $ix = z$ so wird

$$\log\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right) = \frac{ix - \frac{1}{2}i^2x^2 + \frac{1}{3}i^3x^3 + \ldots}{-ix - \frac{1}{2}i^2x^2 - \frac{1}{3}i^3x^3 - \ldots} =$$

subtrahiren

$$= 2\left(ix - \frac{1}{3}i^3x^3 + \frac{1}{5}i^5x^5 + \ldots\right)$$

also $y = \frac{2}{2i}\left(\right)$

$$y = x - \frac{1}{3}i^2x^3 + \frac{1}{5}i^4x^5 + \ldots \quad \text{da } i^2 = -1$$

$$y = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots\ldots$$

für Bogen von 45^0 da $\frac{1}{2}$ sind $\frac{\pi}{2}$ so ist der Bogen $= \frac{1}{4}\pi$ dazu der Tang $= 1$.

daher $\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots$

$$\pi = 4 + \frac{4}{3} - \frac{4}{5} + \frac{4}{7} - \frac{4}{9} + \ldots = 3,{}^{6}$$

123

Wir suchen zurück $\partial\left(\frac{1}{2i}\log\frac{1+ix}{1-ix}\right)$ zu finden

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{i}{1+ix}+\frac{i}{1-ix}\right] \qquad \frac{\partial\left(\frac{1}{2i}\left(\log 1+ix - \log 1-ix\right)\right)}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+ix}+\frac{1}{1-ix}\right)\partial x = \frac{\partial x}{1+x^2} = \partial(\operatorname{arc} \operatorname{tag} x)$$

oder $\left(\partial\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)\right)$

$$x = \operatorname{tg} y$$

$$\partial x = \partial(\operatorname{tg} y) = \frac{1}{\cos^2 y}\cdot dy$$

also $dy = \partial x \cdot \cos^2 y$ $\qquad \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg} y^2} = \frac{1}{1+x^2}$

$$dy = \frac{\partial x}{1+x^2}$$

auch

$\partial\left(\frac{1}{i}\log\frac{1+ix}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ ergiebt dasselbe oder so:

$$\partial\left(\frac{1}{i}\log\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-ix}\right)\right)$$

Anwendungen der Diff. Rech.

auf Mech. - Statik Geometrie auch auf Analysis

unter den letzten stehen hier Rott.

1. Anwendung

$f(x)$ in eine unendl. Reihe zu entwickeln wenn [illegible] ... will [illegible], [illegible]

$$f(x+h) = fx + \frac{df x}{dx} h + \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2!} + \frac{d^3 f(x)}{dx^3}\frac{h^3}{3!} + \dots$$

setzen wir $x = 0$

$$f(h) = \left[f(x)\right]_0 + \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_0 h + (\;\;)\frac{h^2}{2!}$$

d.h. man muss fx haben und statt x, 0 setzen

in dieser Reihe kommt x nirgends vor, setzen wir nun überall statt h x so wird

$$f(x) = \left[f(x)\right]_0 + \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_0 x + (\;\;)\frac{x^2}{2!} + \dots$$

die Reihen für a^x, e^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$ [illegible] entwickelt, [illegible] diese Reihe

$$\sin x = \sin 0 + \frac{\cos x\, dx}{dx} + -\sin x -$$

$$0 + x + ~~\frac{-\sin x}{0}~~ \frac{x^3}{3!} + \dots$$

und wir bekommen $\sin x = 0 + x$

$$f(x) = \tan x.$$

$$\tan x = \tan 0 + \frac{1}{\cos^2 x} + \partial\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) + \partial\left(\frac{2\sin x}{(\cos x)^3}\right)$$

$$+ \partial\left((\cos x)^{-2}\right) + \frac{2\cos x^4 - \sin x \ldots \cos x^2}{(\cos x)^6}$$

$$+ \frac{-2}{\cos^3 x}\,\partial(\cos x) \qquad + 2\cos x -$$

$$+ \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$$0 + x + \ldots + 2\frac{x^3}{3!} +$$

125

der Rech: und weiter vermittelbar
und der Diff: und nicht ungegründet
Ausdr: in eine endl. Reihe zu entwickeln
dass die gemeine Analysis ist das Mittel
dazu. Die Aggregatenrechnung dient wesentlich
dazu. Wir haben weiter für
x 0 in den Coeff:

$$a^{x} = a^{x} + a^{x}.\log a.x + a^{x}(\log a)^{2}x^{2}$$

$$1. + \log a.x + (\log a^{2})\frac{x^{2}}{2!} + \text{———}$$

bei e^{x} ist der Coeff. immer e^{x} also $x=0$ immer 1.
und wir werden haben $1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \text{--}$

Zu ungegründete $\log(x) = \log 0$ — $\log 0 = 1^{-\infty} = \frac{1}{1^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$
so lässt sich $\log x$ nicht entwickeln

$$\log(a+x) = \log a + \frac{d(a+x)}{a+x}x + d\left(\frac{1}{a+x}\right)\frac{x^{2}}{2!}$$

$$+ \frac{1}{a}x + d(a+x)^{-1}\frac{x^{2}}{2!}$$

$$-(a+x)^{-2}\frac{x^{2}}{2!}$$

der Coeff. von $(a+x)$ ist $= 1$

$$-\frac{1}{a^{2}}\frac{x^{2}}{2!}$$

so wird $\log(a+x) = \log a + \frac{x}{a} - \frac{1}{a^{2}}\frac{x^{2}}{2!} + 2\frac{1.1}{a^{3}}.\frac{x^{3}}{3!} - 3!\frac{1}{a^{4}}\frac{x^{4}}{4!}$

$$= \log a + \frac{x}{a} - \frac{1}{a^{2}}\frac{x^{2}}{2!} + \frac{1}{3}\frac{1}{a^{3}}x^{3} - \frac{1}{4}\frac{1}{a^{4}}.x^{4} + \text{———}$$

ist $a = 1$ so wird $\log(1+x)$

da nun $\log 1 = 0$. aber $\log 1$ hat unendl.

viele Werthe darunter ist einer 0.

Die Werthe sind $\pm 2n\pi.\sqrt{-1}$

der Maclaurinsche Lehrsatz ist [illegible]

und die Reihe ist maclaurinsche, sie

ist nichts als Variationsrechnung

oder Lehre des Grössten und Kleinsten

welche so genau [illegible]

Die interessante Aufgabe ist die

Werthe $\frac{0}{0}$ zu bestimmen. Nach der

Theorie kann solcher Quotient nie vor-

[illegible] gedacht werden

$\frac{(p-q)a}{(p-q)b}$ dieser ist $\frac{a}{b}$ aber erst dann

wenn man den Bruch [illegible] Form nicht [illegible]

weil alles [illegible] ist. wird

nun $p=q$ so wird durch Substitution

$\frac{0}{0}$, aber dieser Quotient entsteht nur

weil ich die Form nicht [illegible].

Alle Anwendungen von unendl. Reihen müssen sich [illegible] können als [illegible] werden, indem die Werte für [illegible] x [illegible] werden können – In solchem Falle gilt die Reihe nicht.

Anmerk. $f(x+h) = S\left[\partial^r f(x) \cdot \frac{h^r}{r!}\right]$ ist der Taylorsche Satz, statt r, [illegible] gesetzt und alle [illegible]. Setzt man $x=0$ so wird $f(h) = S\left[(\partial^r f(x))_0 \cdot \frac{h^r}{r!}\right]$ [illegible] x [illegible] mit h vertauscht [illegible] $f(x) = S\left[(\partial^r f(x))_0 \frac{x^r}{r!}\right]$ Maclaurinsche Satz

Geometrische Anwendungen.

$y = f(x)$

Den krummen Flächeninhalt DM zu finden. Wir können den Inhalt nicht finden, wir wollen ihn also finden. Der Inhalt DM ist $\varphi(x)$, $x = AP$, weil Ordinate PM ist auch Funct. von x oder [illegible] $= f(x)$

Hier machen die Differenz [illegible], wenn x um dx unendlich klein wächst, so wächst y um dy und der Inhalt wächst um [illegible] so ist $d\varphi(x) = y.dx = f(x)dx$.

Integralrechnung findet eine Ableitung Function
der $\frac{d\varphi x}{dx} = d\varphi(x)$ so ist $d\varphi(x) = f(x)$.
Wir machen eine Umgekehrte ... die
x wachse um beliebigen Stück h, so
wachse y und ebenso $f(x+h)$, der neue
Inhalt wächst durch

Nach ... Reihen $1)\ f(h) = A_1 + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots$

$2)\ \varphi(h) = C + C_1 h + C_2 h^2 \ldots$

$3)\ \varphi(h) = B_1 + B_1 h + B_2 h^2 + \ldots$

liegt nun $\varphi(h)$ zwischen den Werthen von
$\varphi(h)$ u $f(h)$ so muss $C = A$ sein, sonst ist
es nicht möglich, wenn h jeden Werth be-
kommt, subtrahirt 1 von 2 u 3 so wird

$$\text{I}\quad \varphi(h) - f(h) = (C - A) + (C_1 - A_1)h + (\ )h^2 \ldots$$
$$\text{II}\quad \varphi(h) - f(h) = (B_1 - A_1)h + (\ )h^2 \ldots$$

und nach der Voraussetzung ist der 2te Unterschied
größer, was nicht möglich ist wenn
C nicht $= A$ ist. denn h kann auch im Moment
des Verschwindens gedacht werden

Bewegen also die Reihen 1 u. 3 mit A an so muss auch 2 mit A con-vergiren —

Nun kehren wir zu unserer Aufgabe zurück, um dann das Ableitungsgesetz zu finden.

Ist $y = f(x)$

x sei AP, dazu gehörende Ordinate $= PM = f(x)$

der Inhalt ist Funct. von x, sie sei $\varphi(x)$

so ist $DPM = \varphi(x)$, wächst nun x um h $= PQ$ so ist $AQ = x+h$

u. $QN = y_{x+h} = f(x+h)$

$DQN = \varphi(x+h)$ u. $PQMN = \varphi(x+h) - \varphi(x)$ die Taylorsche Reihe ergibt $PQMN = d\varphi(x)h + d^2\varphi(x)\frac{h^2}{2!} + \ldots$

nun will ich $d\varphi(x)$ finden als Ableitung. Dazu nehm den angegebenen Satz zu Hülfe muss ich 2 Grenzreihen finden die nach einem und demselben Gliede convergiren. Nun liegt $PMNQ$ zwischen $PMRQ$ u. $PSNQ$

$PQ = y \cdot h + 0h^2 + 0h^3 + \ldots$

$PN = y \cdot h + dy \cdot h^2 + \ldots$

zwischen den beiden Reihen liegt die Reihe für $PQMN$ also ist $d\varphi(x) = y = f(x)$

Die Länge des Bogens zu finden

der Bogen ist funct von x, $= \varphi(x)$

wir wollen $d\varphi(x)$ finden man

läßt den Bogen AM um ein weniges

in M. des Verschwindens wachsen so wird

$d\varphi(x) = \sqrt{dx^2+dy^2}$ wenn MN gerade

Linie ist. wieder gleiches absurdum.

die Abl. wird $\frac{d\varphi(x)}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ oder

$$d\varphi(x) = \sqrt{1+dy^2}$$

Nach meiner Ansicht zieht man

2 Tangenten, wovon die eine > die

andere < als d. Bogen. nämlich

$MN > RN$ oder $MN < SM$ wie schon

Archimedes bewiesen

Auch mechanisch

beweist sich, ein Bogen [illegible] stetig [illegible]

~~der Raum~~ für S. so betrachtet [illegible]

der Differentialist als aus = wenig [illegible]

Kanten bestehend so wie er sich krumme

Linien als aus geraden bestehend vorstellt.

ist die Zeit t und das Bewegungsver-
mögen (Geschwindigkeit) nach jeder Zeit ist funct
von t. So ist der durchlaufene Raum
s auch f(t), also ist d(s) = v. d(t) und
d(v) = φ d(t) unter φ die Kraft gedacht
welche in der Zeit d(t) unendlich kleine
Zuwachs erzeugt.

II Integral Rechnung

Aufgabe und Zweck funct zu finden —
Zurückleitung einer funct (x) nach x
besteht darin diejenige function φx
zu finden die die Eigenschaft hat daß
man wenn sie nach x ableitet, sie
dann f(x) wird
funct f(x) nach v, suche ich die funct φ(x)
die nach v abgeleitet wieder f(x)
ergibt.

I Satz

Es ist einerlei ob man f(x) nach x zurückleitet
oder ob man f(x) d(x) (wo d(x) nach v abl gesetzt)
nach v zu[abl]rückleitet

Ist $x = f(v)$ so ist dx funct. ... also $= \pi(v)$ also soll es einerlei ob ich $f(x)$ nach x zurückleite oder $f(x)\,dx$ nach v ableite.

Das ist der einzige Weg der Integralrechnung die durch Substitution ... ist.
Es ist der Satz der Diff.-Rech. I) nur in ... Form

Vermittelst wenn $f(x)$ ist funct. von $x = \varphi(x)$ so daß $\frac{d}{x}\varphi(x) = f(x)$ und

nach I $\frac{d}{v}\varphi(x) = \frac{d}{x}\varphi(x)\,dx$
$= f(x)\,dx$

weil dieselbe funct. φ giebt nach x abgeleitet $f(x)$, nach v abgeleitet ist sie $f(x)\,dx$

Daher die practische Regel wenn nicht zu funct. $\varphi(x)$ bestimmt die zurückl. sondern multipl. $\varphi(x)$ mit dx, wo x eine funct. irgend beliebigen Variablen ist, und such die Abl. von dem Product nach dem neuen Variable und das giebt die zurückl.

II Satz

Zu einer Function giebt es nur einen Abl. nach x. — denn Abl. setzt statt x, $x+h$ setzen durch nach Potenzen von h entwickeln und solche Entw. kann nur eine sein also der Coeff von h auch einer, — wenn 2 funct(x) einander identisch sind, so sind ihre Abl. nach x, oder v, identisch — Zu einer gegebenen Function gehören unendliche Zurückleitungen denn
$\frac{d}{dx}(\varphi(x) + C)$ wo unter C jeden Ausdr. gedacht wird, in dem x der nicht vorkommt, hat die Eigenschaft, daß sie $= f(x)$, weil dC jeden in C kein x vorkommt $= 0$ ist welchen Ausdruck C nennt man nach x constant d.h. er ist von x unabhängig den kennen absolut Constanten. d.h. von nichts unabhängig giebt es nicht.
Also ist $\varphi(x)$ eine Zurückleitung so stellt $\varphi(x) + C$ alle übrigen Zurückleitungen d.h. es kann keine geben die nicht darin enthalten wären ([illegible])

Also hat man eine Zahl gefunden, so ändert man C und setzt alle zur Lösung an. Darauf ist lediglich der Constante C zu bestimmen. Einen gemachten $f(x)$ finde ich, alle will ich finden so ändere ich C, aber einen der Werthe zu bestimmen ist unmöglich. Verlange ich die $\sqrt[3]{1}$ so verlange ich alle 3 drei Werthe, alle drei liegen in $\sqrt[3]{1}$, aber, einen der 3 Werthe kann ich nicht verlangen denn diese sind 1. und $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, und $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$. In Anwendung aber kann ich einen oder den andern brauchen. Integriren heißt alle mögliche Zahlen finden in Anwendungen z. B. den Inhalt brauche ich nur einen Werth, den suche ich auch, aber das ist nicht mehr integriren, das ist Inhaltbestimmung. Dies C wird bestimmt, je nachdem man von einem bestimmten Punkte an den Inhalt bestimmen wollen

$\frac{d}{v}(x^m) = m x^{m-1} dx$. also wenn zurück
$\int$ bezeichnet wird, ist $\int m x^{m-1} dx = x^m$

$\frac{d}{v} a^x = a^x \log a \cdot dx$ so ist $\int a^x \log a \, dx = a^x$

dann wenn man a^x differentiirt so bekommt
man $a^x \log a \, dx$. also es ist kein
Integration, man muss errathen, durch
Wurzeln, der kann ich nur Probiren
d die Operationen lassen nur einzig
zu Probiren. Da ist auch das Integriren

z. B. $\sqrt{729}$ ich sehe $30 \cdot 30 = 900$ $20 \cdot 20 = 400$
also liegt es zwischen 20 u. 30 ich
schreibe ich setze hin $\sqrt{729} = 20 + x$ nun ist
$(20 + x)^2 = 400 + 40x + x^2$ und dies von 729 abge-
zogen und rathe was x sein wird
bis ich treffe.

Da kann man differenziren, aber Integriren
nur durch Versuche.

Nun wollen wir d. Methoden so versuchen um es in Grenze einzuschließen. z. B.

$x^p . dx$ soll zurückgeleitet werden zu-erst sieht man v. weil dx der Schluss $\int x^p . dx$ die Form $d(x^m) = m x^{m-1} dx$ [illegible] uns vermuthen daß das Integral sein wird $A x^m$. welches muß d $A x^m$ [illegible] gesetzt $x^p dx$ geben d. h.

$x^p . dx = m A x^{m-1} . dx$. so muß

$p = m-1$ und $mA = 1$ d. h.

$m = p+1$ und $m = \frac{1}{p+1}$

welches Integral ist $\frac{1}{p+1} . x^{p+1}$ — die Form vermuthet [illegible] und unter allen den Ausdrücken die [illegible] gegeben sind man [illegible] dem Resultat C addiren muss [illegible] seyn wird [illegible] mit [illegible] x, so sind es alle Integrale

Das Resultat kann als praktische Regel behalten werden.

II

$\int a^x dx$ ist gewiss [illegible]
es ist $= Aa^x$

denn $d(Aa^x) = A \cdot a^x \cdot \log a \cdot dx$ so muss $Aa^x \log a \, dx = a^x dx$

wenn $A \log a = 1$ d. h. $A = \frac{1}{\log a}$ also $\int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x$

Bei b ausgeschlossen [illegible] 0 im Nenner nicht vorkommen also p nicht $= -1$. also ist der Fall besonders zu betrachten

$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log x$ nach Diff. Rechn.

Wenn nun ein Ausdruck [illegible] nicht integrirt werden kann, so müsste ich ihn umformen und dazu ist Analysis des Falles nöthig

$2:2 = 5:5 =$ ~~[illegible]~~

$2-2 : 5-5 : 2+8$

$0 : 0 = 2 : 5$

$0 : 4 = 0 : 5$

$4 : 2 = 6 : 3$

$2 : 3 = 2 : 6$

$2 : 5 = 1 : 5$

$2-2 : 5-5 = 2 : 5$

$0 : 0 = 2 : 5$

$0 : 2 = 0 : 5$

$\int e^{ax}.dx$

ich weiß e^x kann ich integriren also setze ich $ax = z$ so wird $\int e^z.dx$, nun muss ich dx in dz ausdrücken

da $ax = z$ so ist $a\,dx = dz$ also $dx = \frac{dz}{a}$ also ist zu finden

$\int \frac{1}{a} e^z . dz$ und das ist $= \frac{1}{a} e^z = \frac{1}{a} e^{ax} + C$

Als Hülfsmittel dienen die Diff. formeln

1) $d(Ax) = A\,dx$ so ist
$\int A\,dx = Ax = A.\int dx$ oder
$A\int f(x)\,dx = \int A.f(x)\,dx$

2) $d(x \pm y) = dx \pm dy$ so ist
$\int x.dx \pm y\,dx = \int x\,dx \pm \int y\,dx$

Beispiele

---

da $d(uv) = udv + vdu$ so ist $uv = \int udv + \int vdu$
also 3) $\int udv = uv - \int vdu$ diese formel nennt man theilweise integriren (integrir par partie)

Zu d. A Aufsatz hatten wir die allg. formel

$\partial\varphi(u,v) = \frac{\partial}{u}\varphi\,\partial u + \frac{\partial}{v}\varphi\,\partial v$ daraus die

allg. Integralformel $\varphi(u,v) = \int\frac{\partial}{u}\varphi\,\partial u + \int\frac{\partial}{v}\varphi\,\partial v$

daraus

$\int\frac{\partial}{u}\varphi\,\partial u = \varphi(u,v) - \int\frac{\partial}{v}\varphi\,\partial v$ dies ist die formel

z aber eine allgemeine, besser ein ausdruck

wenn $\frac{\partial}{u}\varphi = \psi$ ist so ist $\partial\varphi = \psi.\partial u$. weil $\varphi = \int\psi\,\partial u$

so wird 3 formel sein

$\int\psi\,du = \int\psi\,du - \int\frac{\partial}{u}\left(\int\psi\,du\right)dv$ nun

ist das 2te Integral von $\psi\,du$ ein anderes als das erste, denn dieses ist dort gegeben, jenes das vollständige, es ist so wie wenn

$\sqrt[2]{9} = +3$
$\sqrt[2]{9} = -3$

$\sqrt[2]{9} + \sqrt[2]{9} = 0$

also bedeutet dies nur Zeichen ein anderes als das andere.

Beispiele

$\int\sin x\,\partial x = \int\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\,\partial x = \frac{1}{2i}\left(\int e^{xi}\,\partial x - \int e^{-xi}\,\partial x\right)$

$\int e^{xi}\,\partial x$ ist nun zu finden, wir setzen

$xi = z.$
$i.\partial x = \partial z$ also $\partial x = \frac{1}{i}\partial z$ also
$\frac{1}{i}\int e^{z}\,\partial z$ ist zu suchen $= \frac{1}{i}e^{z} = \frac{1}{i}e^{xi}$

also wird oben $= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i}e^{xi}\right.$ — und drittens wird gesetzt

$-xi = z$ so wird, ebenso $= -\frac{1}{i}e^{-xi}$ also das

obere $= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i}e^{xi} + \frac{1}{i}e^{-xi}\right) = -\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = -\cos x = \int\sin x\,\partial x.$

2.

$\int \sin(px+q)\,dx$ ich setze $px+q = z$
so ist $p\,dx = dz$
also $dx = \frac{1}{p}\,dz$

$\frac{1}{p}\int \sin z \cdot dz = -\frac{1}{p}\cdot\cos(px+q)$

3.

$\int \sin(px+q)\cos(rx+s)\,dx$

man muss das Product in Summe oder Differ a Cos... oder Diff der Sinuse verwandeln

Die analysis lehrt daß $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

beyde formeln (±) addirt giebt $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cdot \cos y$

also wird $\int \frac{\sin[(p+r)x + (q+s)] + \sin[(p-r)x + (q-s)]}{2}\,dx =$

wegen eingeklammerten Ausdrucks wird noch 2) sich ergiebt und es wird

$$= -\frac{1}{2(p+r)}\cos[(p+r)x + (q+s)] - \frac{1}{2(p-r)}\cos[(p-r)x + (q-s)]$$

4.

$\int (ax+b)^m\,dx$ = ich setze $(ax+b) = z$
$a\,dx = dz$
$dx = \frac{1}{a}\,dz$

so wird $\frac{1}{a}\int z^m \cdot dz = \frac{1}{a(m+1)}(ax+b)^{m+1}$

(5)

$\int(ax^2+b)^m dx =$ ich setze $(ax^2+b) = z$

$$2ax\,dx = dz$$

$$dx = \frac{1}{2ax}dz$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\frac{z-b}{a}}}dz$$

so wird $\frac{\sqrt{a}}{2a}\int\frac{z^m}{\sqrt{z-b}}dz$, was zu integriren nicht geht

hingegen lässt sich weit $\int(ax^2+b)^m x.\,dx$

so geht nun $\int(ax^p+b)^m x^{p-1}\,dx$ zu

integriren und das nicht

Alle die Fälle wo es zu integriren nicht

geht lassen sich integriren in unendl.

Reihen, was nicht brauchbar ist

(6)

$\int a^x x^2 dx$ ist $a^x = z$ wird

$A\int(\log z^2)dz$ damit ist nichts gewonnen

Aber so oft man Producte hat so wird

man immer die Formel [illegible] 3) d. i. Theilungs

integriren

142 die formel 37 ist $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

also ist $u = a^x$

$dv = x^2 dx$

$v = \frac{1}{3}x^3$ also ist

$$\int a^x x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} a^x \cdot x^3 - \frac{\log a}{3}\int x^3 a^x dx$$

wodurch wir nichts gewonnen haben aber umgekehrt um $\int x^3 \cdot a^x \cdot dx$ könten wir die formel gebrauchen, um es in $\int x^2 a^x \cdot dx$ zu verwandeln

setzt man aber $u = x^2$

$dv = a^x \cdot dx$

$v = \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$ dann

also $\int x^2 \cdot a^x dx = \frac{x^2 a^x}{\log a} - \frac{2}{\log a}\int a^x \cdot x\, dx$

nun ist zu finden

$\int a^x \cdot x \cdot dx$ wieder selben formel verwenden

$u = x$

$dv\ a^x$

$v = \frac{a^x}{\log a}$ da zu $\int a^x \cdot x\, dx = \frac{x\, a^x}{\log a} - \frac{1}{\log a}\int a^x \cdot dx$

und $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$ also resultirt

$$\int a^x x^2 dx = \frac{x^2 a^x}{\log a} - \frac{2\,(x a^x)}{(\log a)^2} + \frac{2 a^x}{\log a^3}$$

Der einfachste Weg um alles integriren zu können, wären, um Summe Differ. Prod. Qual. oder Wurzel Log: zu integriren daß nur die Summe [diff] kan man integriren. Also dem Formel können, die Integrale auch den die Summe oder Diff. zurückzuführen wo die nicht geht. gesetzt auch nicht zu integriren. Um ein Prod. zu integr. ist das schwerste integriren was nur möglich ist.

Daraus folgt sich ergeben. Alle Function soll man in gewisse Classen getheilt, jede Classe besonders betrachten und zu integriren suchen. Die Funct. theilt man in algebr. und transcendente. Der Unterschied ist schwer zu bestimmen. In dem Gesetz [illegible] Zeichen [illegible] wird [illegible] ein ganz kleines so lange a und b allg. sein kann, so lange kann ob $f(x)$ sein, dann die Function ist [illegible]

Es ist die Analysis nicht mit Größen sondern mit Operationen zu thun hat. So ist nur nicht die Größen [illegible] Operationen [illegible] sind. a und b, ist [illegible] nicht [illegible] ist [illegible]

Es muss nun [illegible] ab der Rede sein wie a und b [illegible] oder alles ist nicht ob a = b, positiv, negativ, imaginär ist. Dann alles drin ist speciell. Allen gilt von $\sqrt[m]{a}$ und a^b

144 velsp. allgeb.: sind die Ausdrücke, wo
allgem. höheren Wurzeln u. Logarithmen nicht
vorkommen, nur wo die allgem. Summen
Diff. oder Prod. der Potenzen vorkommen

Wenn ich gewisse funct y x habe
mit gewissen Werthen von x, die selbst
gewisse Werthe nehmen, und frage
welche Werthe von x sind es die die
funct zu 0 machen, so löse ich die
Antwort durch algebr. Gleichungen. dann
ist die funct algebr.: so wird algebr.
Gleich., ist die funct. transcendent
so wird auch die Gleich. transc.: [illegible]
berührt sich Algebra und Integralrechnung
in diesem Punkte.

habe ich eine unbekannte function z. B.
$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = fx$, und ich ~~soll~~ habe statt x
allen reelle stetige Werthe in x wachsend
~~zu finden~~ von + unendlich ab zu 0 nach
bis zu unendl.: zu finden. wie ist
die function selbst. Ich mache x so

abnehmend
negativ zu
Dr Bauer

x sei einer der reellen Werthe von x
und h sei positiv aber im Moment des
Verschwindens so ist x+h der nächst > Werth (grösser)
und x−h der nächst < Werth, so daß zwischen
x+h und x−h zwischenliegt. ich muß mir
also unter h mehr denken d.h. kleiner
als jeder Werth der noch so klein wäre
zu denken drei Werthe bekommt die
Function drei Werthe f_{x+h}, f_x, f_{x-h}
der f_{x+h} nach Taylorschen Satz in Reihe gesetzt,

$$f_{x\pm h} = f_x \pm \partial f_x\, h + \partial^2 f(x)\frac{h^2}{2!} \pm \dots$$

alles hängt nun von ∂f_x ab: ist sie positiv ~~[durchgestrichen]~~
— da sie eine Funct von x ist, also nichts
specielles ist, so wird sie doch speciell wenn
x speciell ist. — so ist der ~~Werth~~ (Zahlwerth) der Funct auch d. [von ab]
auch positiv und die drei Werthe von
x steigen. ist die Abl. negativ so
fallen die Werthe mit x. — Ist die
Abl = 0 so ist $f(x+h) > f_x$ und $f(x-h) >$ als $f(x)$.
Für den Werth von x, der macht, daß die
Ablg von x 0 wird, so wird $f(x)$ klein

als seine Nachbarn $f(x+h)$ u. $f(x-h)$
das ist der Lehrsatz zu Größten u. Kleinsten
dergestalt wenn die 2te Ableit. [funct.] positiv
ist, ist die 2te Abl. negativ so
ist fx größer als seine Nachbarn

Auf das voraus geschickte kehren wir zu der gewöhnlichen Betrachtung derselben zurück.

Eine function von der allgemeinsten Form
$a+bx+cx^2+dx^3+\ldots\, rx^m$ heißt eine
ganze function, da das Product, so wie die Summe
u. Differenz zweier solchen funct. eine neue immer
derselben Form bilden, so geben sie auch
immer ganze functionen. Wenn der Quotient zweyer
funct. kann eine Ausrechnungsweise eine ganze
function geben. aber wo er sie nicht giebt
heißt er eine gebrochene function, deren
allgemein. Form die ist. $\dfrac{a+bx+cx^2+\ldots\, rx^m}{a_1+b_1x+c_1x^2+\ldots\, r_1x^{m_1}}$

Solche gebrochene function hat 2 Unterabtheilungen. Sie heißt echt gebrochen
wenn der höchste Exponent des Zählers kleiner
ist als der höchste Exponent des Nenners. Sind
sie beyde gleich, oder ist der erste größer
als der zweyte, so ist die funct. eine unecht gebrochene

Die rela: form einer ächtgebrochenen ist $\frac{a+bx+cx^2+\dots\dots rx^m}{a_1+b_1x+c_1x^2+\dots r_1x^{m_1}}$
wenn da $m \gtrless m_1$, dieselbe form ist
für eine unächtgebrochene function
nur ist dann $m_1=m$, oder $m_1>m$,

Bemk. Wir sehen daß die ganzen function das System der
Zahlen mit feinerer ... dann ist $x=10$ dann ist z.B.
$3+2x+x^2+5x^3$ oder $5x^3+x^2+2x+3 = 5.10^3+10^2+2.10+3$
$= 5000+100+20+3 = 5123$. Wir sehen ferner daß
gebrochene functionen Brüche sind, und zwar die ächt:
gebr. funct: entsprechen den ächten Brüchen, die
unächtgebr: den unächten Brüchen. Hier unser
Beweis, daß das Zählen in der Mathem: und die Darstell.
Zusammensetzung der niedern Elemente ist.

Beyde functionen die ganzen und gebrochenen
nennt man rationale functionen. Wo
Wurzelzeichen mit bestimmten Wurzelexponenten ~~vorkommen~~ ist die
function irrational z.B. $\sqrt{1+x}$ oder
$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sqrt[3]{\frac{x+3x^2+x^3}{1+x}}$ u.s.f.
sind alles irrationale functionen v. x.
Die rationalen und irrationalen functionen
nennt man die algebraischen, alle übri-
gen die transcendenten. —
Es kommt nun darauf an, jede diese function
entwickeln zu können.

$a \cdot dx$

$\int (bx \cdot dx)$.

Wir nehmen die ganze function von

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots rx^m$$

daher wird integrirt indem man jedes ihrer Glieder integrirt also giebt es

$$ax + \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}cx^3 + \tfrac{1}{4}dx^4 + \ldots\ldots \tfrac{1}{m+1} r x^{m+1}$$

wobei nun zu bemerken ist daß $\int a = ax$ denn $a = ax^0$ also $\int ax^0 = \tfrac{1}{1}ax^1 = ax$. und umgekehrt ist $d\,ax = a$.

Damit ist nun das Integriren der ganzen function abgemacht. Wir gehen nun zum Integriren der gebrochenen function über. Hier gilt nun der Satz, daß jede unächte gebrochene Function sich zerlegen läßt in eine ganze function + eine ächte gebr. funct. Die Zerlegung wird dadurch bewerkstelligt. Es sei eine unächte gebr. func.

$$\frac{2 + 3x + 4x^2 + 2x^3}{1 + 4x + 2x^2}$$ so kann ich sie nach der

Regel $\frac{A}{B} = Z + \frac{A - ZB}{B}$ in eine Summe zerlegen.

Zu einer ganzen function nehme ich statt $Z = \alpha + \beta x$

so wird also die function

$$A = 2 + 3x + 4x^2 + 2x^3$$

$$-ZB = -\left\{\begin{matrix}\alpha + 4\alpha x + 2\alpha x^2 \\ + \beta x + 4\beta x^2 + 2\beta x^3\end{matrix}\right.$$

$$\frac{A - ZB}{B} = \frac{(2-\alpha) + (3 - 4\alpha - \beta)x + (4 - 2\alpha - 4\beta)x^2 + (2 - 2\beta)x^3}{1 + 4x + 2x^2}$$

Da β ein willkührliches Coefficient, so kann es einen solchen Werth an, der den Coeff von x^3 im Zähler zu 0 macht, also =1

denn $2-2\beta=0$

$\beta=1$

Da α auch ein willkührliches ist, so kann es einen solchen Werth haben, der den Coeff von x^2 im Zähler zu 0 macht also $=0$

denn $4-2\alpha-4\beta=0$

$$\alpha=\frac{4-4\beta}{2}=\frac{0}{2}=0$$

Setzt man die Werthe statt α und β überall ein so wird

$$\frac{2+3x+4x^2+2x^3}{1+4x+2x^2}=x+\frac{2+2x}{1+4x+2x^2}$$ welcher

Zweck ist dennoch erreicht. So wird auch dieser Zweck immer erreicht seyn wenn man [illegible] x in dem angenommenen Werthe $\alpha+\beta x$ von der Potenz sei, die dem Unterschiede der höchsten Potenzen im Zähler und Nenner gleich ist. d. h. ist die oberste Potenz im Zähler x^m und die im Nenner x^n, so muss die im angenommenen Werthe $=x^{m-n}$ seyn.

Es ergiebt sich also die Regel darauf [illegible] die echt gebrochene Function integriren zu können.

150 Die allgemeinste Form einer gebrochenen Function ist die

$$\frac{a+bx+cx^2+\dots\dots rx^m}{a_1+b_1x+c_1x^2+\dots\dots r_1x^{m+1}}$$

Denn man auch einige Potenzen ausschließen, so können den Coeff. $=0$ setzen. Eine solche Funct. läßt sich immer reduziren auf folgende Summe

$$\frac{A}{\alpha x+\beta}+\frac{B}{\gamma x+\delta}+\frac{C}{\varepsilon x+\zeta}+\dots\dots$$

daß man nun die alg. gebr. Fun. in ihre Partialbrüche zerlegen, erhellt in der Analysis des Endlichen [illegible] behandelt wird. Abst. Cap. I

Anmerk. Wir haben hier ein Beispiel [illegible] nehmlich wie durch obige Art eine [illegible] alg. gebr. Funct. in eine ganze + echt gebr. zu [illegible] verwandelt wird. Man schreibt nehmlich den Zähler und Nenner rückwärts, nach der höchsten Potenz an, u. dividirt den Nenner in den Zähler hinein

so lange [illegible]

$$\frac{2+3x+4x^2+2x^3}{1+4x+2x^2} = \left|\, 2x^2+4x+1 \,\right| \frac{2x^3+4x^2+3x+2}{2x^3+4x^2+x} \Big|_{2x+2} = x+\frac{2+2x}{1+4x+2x^2}$$

Diese Art zu verfahren ist praktischer als [illegible]

Dies ist in der Natur d. Sache immer möglich, ja auch vielfach möglich und dann ist das Integriren möglich denn $\frac{A}{\alpha x+\beta}$ [illegible] um zu integriren man $\alpha x+\beta = z$ setzen, so werden alle übrigen ebenfalls integrirt

Ehe wir zu dem eigentlichen Aufmitteln dieses Verfahrens schreiten wollen wir einige mehr recht Versuche anstellen

Die gegebene function sei z. B. $F = \dfrac{a+bx+cx^2}{a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3}$

so sage ich F ist immer $= \dfrac{A}{\alpha x+\beta} + \dfrac{B}{\gamma x+\delta} + \dfrac{C}{\varepsilon x+\zeta}$

dann man ich den 3 Brüche unter General Nenner bringe

$$\frac{A(\gamma x+\delta)(\varepsilon x+\zeta) + B(\alpha x+\beta)(\varepsilon x+\zeta) + C(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)}{(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)(\varepsilon x+\zeta)}$$

wenn man die Multipl. durchführen und nach Potenzen nach x ordnen so wird im Zähler vorkommen $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2$ denn keine höhere Potenz giebt es nicht, im Nenner wird vorkommen $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1x + \mathfrak{c}_1x^2 + \mathfrak{d}x^3$ da nun

$$\frac{a+bx+cx^2}{a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3} \text{ mit } \frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x+\mathfrak{c}x^2}{\mathfrak{a}_1+\mathfrak{b}_1x+\mathfrak{c}_1x^2+\mathfrak{d}x}$$

der form nach gleich ist. Mithin kann ich Gleichungen zwischen den einzelnen Coeff. anstellen der Gleichungen werde ich 7 bekommen allein der Unbekannten giebt es 9 nämlich $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$. Allein zwei davon α u. γ kann ich unbestimmt lassen, denn sie werden sich auch d. bestimmen lassen.

Deutlicher zeigt sich an einem Beispiele die Funktion $\frac{a+bx+cx^2}{a_1+b_1x+c_1x^2+dx^3}$ kann nur an eine solche umgewandelt werden

$$\frac{a+bx+cx^2}{a_1+b_1x+c_1x^2+x^3}$$

indem man Zähler und Nenner durch d wegdividirt. Diese Funct wird nun = sein $\frac{A}{x+\alpha}+\frac{B}{x+\beta}+\frac{C}{x+\gamma}$

oder $=\frac{A(x+\beta)(x+\gamma)+B(x+\alpha)(x+\gamma)+C(x+\alpha)(x+\beta)}{(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)}$

Will ich hier zunächst α, β und γ bestimmen so muss ich sehen welche Werthe von x den Nenner zu 0 machen, ich bekomme also die Gl:

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)=0$$

welches eine kubische Gl. ist. Deren Auflösung giebt drei Werthe für x, welche dann α, β und γ sind. Da hängt also die Lehre der höheren Gleichungen hiermit zusammen, und ist erforderlich zu diesen Operationen

Hat man ein Bruchexempel [illegible] $\frac{2x-3}{x^3-2x^2-x+2}$

und wollen es in 3 [illegible] zerlegen
der Nenner ist function vom 3ten, und man müßte
ihn in 3 factoren zerlegen, wenn man das
so, daß man den Werth von x sucht, der
die function zu 0 macht – man setzt die
funct $=0$, und löst nach Cardanischer
formel, doch würde uns ein [illegible] Vortheil
[illegible]. Man setzt $x=10$, dann $x=0$
daraus [illegible] $x=0$ ist dem Werthe näher
der die funct zu 0 macht, als 10, ich setze
$x=1$, so ist die funct $=0$. dann ist
$(x-1)$ einer der drei factoren, dividirt man
damit die gegebene funct vom 3ten Grade bekommt
man eine quadratische funct x^2-x-2 das
zerlege ich wieder in 2 factoren und suche
die beyden Werthe von x, die die funct zu 0 machen

$x^2-x-2=0$

$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=2$ und -1 also sind die 2 fact
$(x-2)$ u $(x+1)$. Willkührliche [illegible]: sie in
factoren zerlegen geht nicht so leicht, durch
[illegible] 2 Werthe der funct positiv und negativ
[illegible] wird.

$(x-1)(x-2)(x+1)$ ist nun $= x^3 - 2x^2 - x + 2$

so sind die Partialbrüche

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} = \frac{2x-3}{x^3-2x^2-x+2} \text{ oder}$$

$$\frac{A(x-2)(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)(x-2)}{x^3-2x^2-x+2} = \text{———} \text{ oder}$$

durchgeführt

$$\left.\begin{matrix} A \\ +B \\ +C \end{matrix}\right] x^2 \left| \begin{matrix} -A \\ \\ -3C \end{matrix}\right] x \left| \begin{matrix} -2A \\ -B \\ +2C \end{matrix}\right\} = 2x-3$$

und ich bekomme 3 Gleichungen

$A + B + C = 0$

$-A - 3C = 2$

$-2A - B + 2C = -3$

durch Gleichung aufgelöst. $C = \frac{5}{6}$ $B = \frac{[illegible]}{3}$

$A = \frac{1}{2}$

und der Partialbrüche sind

$$\frac{\frac{17}{6}}{x-1} + \frac{\frac{11}{3}}{x-2} + \frac{\frac{5}{6}}{x+1} = \frac{2x-3}{x^3-2x^2-x+2}$$

Das geht zu integriren. Aber der Umstand der Nenner in jene Partialbrüche

zu zerlegen, welches Glied aller Grade aufgelöst haben will, muss [illegible]. Allg. Gl. kann man nur bis 4ten Grad auflösen, wenn die Coeff allg. sind. Und sind auch die Coeff in Ziffern, ist dies doch sehr schwer. Das ist der Weg der Versuche ein [illegible] [illegible] so. Der Zähler sei $= Z$ der Nenner zerlege ich in 2 Factoren $(x-1)$ der eine, der zweite P weil dies übrige ist. So wird der Bruch: $\frac{Z}{(x-1)P}$ den zerlege ich in 2 Partialbrüche [illegible] ist $= \frac{A}{x-1} + \frac{Z_1}{P}$ also wenn [illegible] so wird $Z = AP + (x-1)Z_1$ wenn jetzt ich x [illegible] dass der Factor $(x-1)$ 0 sein wird ich setze $x=1$ so wird (Z) das Z was herauskommt wenn $x=1$ ist das A ist unabhängig das P ist (P) aber was es wird wenn $x=1$ ist so wird

$$(Z) = A(P) \text{ also } A = \frac{(Z)}{(P)}$$

da $Z = 2x-3$ so ist $(Z) = 2-1 = 1$

$P = (x-2)(x+1)$ also $(P) = -2$ also $A = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

P wird nun [illegible] zu finden $(x-1)(x+1)$ also $= \frac{1}{3}$ u. $C =$ wird $-\frac{5}{6}$

Warum ich gerade $x=1$ setze, ist weil ich den Factor $(x-1)=0$ setzen ist damit das Glied $(x-1)Z$, verschwindet. Dann es muss verschwinden, sonst wenn ich z. B. $x=a$ setzte so bekomme ich zwei 2 gleiche Gleichungen für dieselbe $x=a$ aber für ein anderes Z, weil dieses das x enthält und es jeder Gl: ein anderes wird.

Die Partialbrüche sind also immer nöthig wenn der Nenner der Funct sich in Factoren zerlegen läßt. Hat aber der Nenner zwei gleiche Factoren, haben wir z. B. $\frac{Z}{(x-\alpha)^2(x-\beta)}$ so sind die 3. Factoren des Nenners $(x-\alpha)(x-\alpha)(x-\beta)$ und die Partialbrüche also $\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\alpha}+\frac{C}{x-\beta}$ welches $=$ ist $\frac{A+B}{x-\alpha}+\frac{C}{x-\beta}$ oder $\frac{D}{x-\alpha}+\frac{C}{x-\beta}$ und diese beyden geben die Function nicht weil $(x-\alpha)(x-\beta)$ nicht [illegible] dann Nenner seyn wird. Wenn

muß hierbei also sind zu halten suchen. —

Ist der Partialbruch $\frac{A}{x-\alpha}$ so wird A gefunden

$\frac{Z}{P}$ unter Z den Zähler der gegebenen Funct. verstanden unter P das product aller übrigen Factoren wo ich x den Werth α gebe. Sind die Factoren im Nenner einander gleich, so ist es allemal möglich den Partialbrüchen diese Form zu geben $\frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{x-\alpha} + \frac{C}{(x-\beta)}$ oder wenn Nenner = ist $(x-\alpha)^2 P_x$ wo P function von x ist. in $\frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{Q}{P_x}$ unter P das product der übrigen Factoren verstanden, wo $(x-\alpha)^2$ nicht vorkommt, so wird der Bruch $\frac{Z_x}{N_x}$ allgemeiner function wenn $N_x = (x-\alpha)^2 \cdot P_x$

$$= \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{(x-\alpha)} + \frac{Q_x}{P_x}$$ wir multipliciren durch N also so wird $A \cdot P_x + B(x-\alpha) P_x + Q_x (x-\alpha)^2 = Z_x$

setze ich $x = \alpha$ so wird $A \cdot P_\alpha = Z_\alpha$

$$A = \frac{Z_\alpha}{P_\alpha}$$

um B zu finden, so ist A bekannt geworden ich setze es auf die andere Seite und dividire durch $x-\alpha$ so wird

$$B \cdot P_x + Q_x (x-\alpha) = \frac{Z_x - A P_x}{x-\alpha}$$

ich muß mithin multipliciren nun $x = \alpha$ setzen und daß 0 muß im Nenner kommt der Quotient $= Z'_x$ und ich setze $x = \alpha$ und bekommen

$B . P_\alpha = Z'_\alpha$ woraus sich B findet.

Q_x wird gefunden $= \dfrac{Z'_x - B . P_x}{x - \alpha}$

was sich aufheben läßt weil Q_x eine ganze function ist.

Wäre $N_x = (x-\alpha)^3 . P_x$ so ist der Partialbruch

$\dfrac{C}{(x-\alpha)^3} + \dfrac{A}{(x-\alpha)^2} + \dfrac{B}{x-\alpha} + \dfrac{Q_x}{P_x}$ durch N

hinzumultiplicirt giebt

$CP_x + A(x-\alpha)\,P_x + B(x-\alpha)^2 P_x + Q_x(x-\alpha)^3 = Z_x$

daraus $CP_\alpha = Z_\alpha$

dann findet sich A daß man CP_x auf andere Seite bringt, und durch $x - \alpha$ dividirt u. s. f.

Beispiel

Es sei $\frac{1-x}{x^3(x+1)^2(x-2)}$ in Partialbrüche zu zerlegen

$\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}\frac{C}{x}$ um A zu finden wird

der Zähler durch Nenner dividirt $x \cdot P$

oder sogar $x=0$ gesetzt weil dort den

vorderen Factor zu 0 setzt. so ist $A = \frac{1}{2}$

muss berechnet werden

Nun $\frac{Z_x - AP_x}{x-\alpha} = Z'_x$ oder $\frac{(1-x) - A\cdot(x^3-3x-2)}{x-\alpha}$ (wenn x gesetzt)

welches gibt $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}$ nun ist $B = \frac{Z'_\alpha}{P_\alpha}$

also $x=0$ so wird $A = -\frac{1}{2}\cdot B + \frac{5}{4}$

nun berechnet man $\frac{Z'_\alpha - BP_\alpha}{x-\alpha} = Z''_x$

so Z''_x wird $\frac{-5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$

also $C = \frac{Z''_\alpha}{P_\alpha} = $ so $= -\frac{15}{8}$

und Q_x zu finden wird berechnet $\frac{Z''_x - CP_x}{x-\alpha} = Q_x$

welchen Bruch ich nicht mehr zerlegen muss

Es ist noch nachzunehmen dass wie ein [illegible]

ist bei jedem Partialbruch vgl. Lehrbuch d. Analyse II

Es ergiebt sich nun daraus $\int \frac{A\,dx}{x-\alpha}$ zu integriren. ich setze $x-\alpha = z$ wonach $dx = dz$ so wird $\int \frac{A\,dx}{x-\alpha} = A\int \frac{dz}{z} = A \log(x-\alpha)$. Ist zu integriren $\int \frac{A\,dx}{(x-\alpha)^n} = A\int \frac{dz}{z^n} =$ $= \frac{-A}{n-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}}$. So können wir alle gebrochenen funct. integriren

Beispiel

$\int \frac{dx}{1+x^2}$ zu finden. ich zerlege $1+x^2$ in factoren also $1+x^2=0$ | $x^2=-1$ | $x=\pm\sqrt{-1}$ | $x=\pm i$ die beyden factoren sind $(x+i)(x-i)$. die Partialbr. sind $\frac{A}{x-i}+\frac{B}{x+i}$. das A finde ich wenn $\frac{1}{Q'} = \frac{1}{x+i}$ wenn $x=+i$ weil $(x-i)$ zu 0 wird also $A=\frac{1}{2i}$ $B=\frac{1}{2i}$ die Partialbrüche sind $\frac{\frac{1}{2i}}{x-i} - \frac{\frac{1}{2i}}{x+i}$ jedes wird diff. $(x-i)=z$ gesetzt u. differ: so wird $\int\frac{dx}{1+x^2} =$ $= \frac{1}{2i}\log(x-i) - \frac{1}{2i}\log(x+i) = \frac{1}{2i}\log\frac{x-i}{x+i} = \frac{1}{2i}\log$ (den bruch mit $+i$ multipl. $\frac{1+ix}{-1+ix}$) das ist algebr. imaginär, man kann aber auch integral umformen, denn man kann jedesmal addiren (etwas) wenn es nur von x unabhängig ist, so kann ich hier $\frac{1}{2i}\log(-1)$ addiren so wird das integral nie verändert, addirt man C so sind wieder alle, hätten wir früher C addirt, so hätten wir wieder alle, denn in jedem Falle bekommen wir das selbe differential so wird $=\frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)$, daß hier i vorkommt wird die Grenze nicht immer imaginär, so wenig $\left(\frac{3}{4}\cdot 8\right)$ gebrochene Zahl ist weil $\frac{3}{4}$ vorkommt, und stellen die Ausdr: imaginaires dar. so sind wir gerathen nur in der form $P_x + qi$, q welch x constant ist. Wissen wir daß $e^{zi} = \cos z + i\sin z$ u. $e^{-zi} = \cos z - i \sin z$, diese formen lassen Logarithme in andere formen umstellen damit ich nun einen ähnlichen Ausdr wie $\frac{1+ix}{1-ix}$ zu bekommen so wird $e^{2zi} = \frac{\cos z + i\sin z}{\cos z - i \sin z}$ und durch $\cos z$ dividirt den bruch wird $e^{2zi} = \frac{1+i\,\mathrm{tg}\,z}{1-i\,\mathrm{tg}\,z}$, wenn setze z so daß $\mathrm{tg}\,z = x$ wird oder $\mathrm{arctg}\,x$ so wird unser $\int\frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\,x$ wo i nicht mehr vorkommt, obwohl es ist nicht reell wenn der x allgemein ist, so ist es auch imaginer oder reell. und diff $\mathrm{arctg}\,x$ ist auch $=\frac{dx}{1+x^2}$

2

Zu integriren $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ der Nenner in fact. $ax^2+bx+c=0$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

die beyden factoren sind $\left(x - \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

Nun sehe ich ich müsste dieß gegen noch durch
a den Coeff von x^2 multipliziren damit
der factor d Nenner herauskomme; dieß
ist immer d soll man x^2 ohne Coeff
setz. ... dann $= \int \frac{dx}{a(x-\alpha)(x-\beta)}$ wenn α u β die factoren sind

oder $\frac{1}{a}\int \frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ nun müsste man

$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ in seine Partialbr. zerlegen $\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$

$A = \frac{1}{\alpha-\beta}$ u $B = \frac{1}{\beta-\alpha}$, denn ... wenn A findet
sich B nach formel das $\frac{\text{Ziffer}}{\beta}$ ... und also

$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta}\right)$ u integrirt wird

$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(\alpha-\beta)} \log(x-\alpha) - \log(x-\beta) = \frac{1}{a(\alpha-\beta)} \log \frac{x-\alpha}{x-\beta}$

zähler u nenner durch $(x-\alpha)$ multipl

u in Werthe gesetzt $= \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \log \frac{(x-\alpha)^2}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}$

dies wird null wenn $b^2 = 4ac$ wird imaginär wenn $b^2 < 4ac$

dasselbe ... integrirt

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

A) $ax^2+bx+c = \alpha z^2+\beta$ (damit dieser Nenner gemacht werde) wenn $z=(x+h)$, um h zu finden

wird $\alpha(x+h)^2+\beta = \alpha x^2 + 2\alpha h x + \alpha h^2+\beta$ so wird

$\alpha = a$ und $h=\frac{b}{2a}$ also $z = x+\frac{b}{2a}$ und ist das so ist der Gl A) identisch und β muß = sein $\frac{4ac-b^2}{4a}$, weil ... Coeff., darnach ist $dz = dx$ also unser Integral wird $= \int\frac{dz}{az^2+\beta}$ wo β ist soll 1 sein ich dividire den Nenner durch β und multiplicire zugleich so wird

$= \frac{1}{\beta}\int\frac{dz}{\frac{a}{\beta}z^2+1}$ und statt $\frac{a}{\beta}z^2$ will ich v^2 so wird $\sqrt{\frac{a}{\beta}}\cdot z = v$ um dz in dv auszudrücken wird $\sqrt{\frac{a}{\beta}}\cdot dz = dv$ so

wird das Integral $= \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{\beta}{a}}\cdot\int\frac{dv}{1+v^2}$ und $\int\frac{dv}{1+v^2}$ ist arc tg v

so wird das Integral $= \sqrt{\frac{1}{a\beta}}\cdot \text{arc tg}\, v$ oder den Werth statt v wird $= \sqrt{\frac{1}{a\beta}}\cdot \text{arc tg}\sqrt{\frac{a}{\beta}}\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)$ statt β den Werth

$$= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\cdot \text{arc tg}\,\frac{2a\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{4ac-b^2}} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\cdot \text{arc tg}\,\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

Wenn alles in Zahlen ist so müßte ich $\frac{2ax+b}{\dots}$ bestimmen tg in Tafeln suchen, den Bogen bestimmen nach der Proport: wenn $180^0 : \pi$ = der ∠ in Tafeln : x und multiplicire durch den Coeff.

Die 2 verschiedenen Integrale, können wirklich verschieden sein, aber gleich wenn sie von sich ab, so muß der Unterschied ein Constantes Gewicht sein. d. h. von x unabhängig. Um dies zu vergleichen setzt man für x gewissen Gewicht, ich würde dagegen Zerot $= 1$ setzen daß x darauf bestimmt ob Gewicht annehmen so wird $\log 1 = 0$.

Habe ich $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, wenn ich $x = z + h$ setze so kann man, wenn man statt x $(z+h)$ substituirt, entweder ~~z^3 oder~~ z^2 oder z wegschaffen, indem man h so wählt daß der Coeff von z^2, oder z ~~..~~ $= 0$ sein wird. So ist, z. B. aus $ax + by = c$, $dx + ey = f$. um x u. y aufzulösen so geht es wie daraus x wegzuschaffen oder y. ich multip. durch h die 2te Gl. $hdx + hey = hf$, u. addire die Gl. $(a+dh)x + (b+he)y = c + hf$. und drücke nun h dass $a + dh$ oder $b + he = 0$ wird das Hauptgesetz ist solche neuen Unbestimmten in die Rechnung zu bringen und sie bestimmen nach Umständen bestimmt sind, darauf gründet sich die Cardanische Form, u. d. die ganze höhere Mathematik

ja als denken ... Modus ist der unendl. Substz
wesentlich als Grenze des unendlichen, also
negative dessen negation des Unendl. ist.
der modulus grenzt den Substz ein, und ist
so zu verstehen als attribut. Was immer
daran der [illegible] [illegible] ist, ist nicht auch der Zeit. Das denken ist
[illegible] [illegible] [illegible] des [illegible] Vorstellung und daher nicht [illegible]
[illegible] [illegible] bestimmte [illegible], zugleich mit ihr sein kann. Der
Ausdruck. Dadurch ist der [illegible] reale [illegible] ist
der Modus wesentlich. essentiam hom: constituit, a certis
attributis [illegible] aliquid quod in illa est. x propos: [illegible] Alles
ist ein Theil der unendl. Welt. Gott so kann er nicht unendl.
ist, [illegible] so kann er. [illegible] Propos:] Alleine so kann der Modus
[illegible] [illegible] [illegible] negative ist [illegible] [illegible] Substz
kann er nicht unendl., kann er nur der [illegible] [illegible] ursprünglichen
jeder Begriff ist ein begrenzter, ein modus nicht attributs
der [illegible] Sub. Jeder Gedanke ist modus von attribut des
unendl. denken. Dass ist und das [illegible] ist ein geistiges.
Das denken an sich ist notwendig, aber nicht jedes
einzelne denkende so der Modus ist dem [illegible] Dasein
[illegible]

Wir gehen nun zu irrationalen funkt: über die Kunst sie zu integr. besteht darin sie in rationale zu verwandeln.
Immer erst können mehr Wurzel vorkommen dann können 2 Wurzeln mit gleichen radicanten oder zwei gleiche Wurzel mit verschiedenen radicanten oder beyde ungleich oder gleich, oder viele Wurzeln etc. etc.
Diesen sind nur jene die man in rationale verwandeln kann, aber die sind sehr wichtig.
Ist eine function von x und einer Wurzel $\sqrt{\ }$ rational zusammengesetzt, d.i. durch alle Operationen außer durch Wurzelziehung,

$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ in algebr: rationale zu verwandeln. dazu mache ich so ich setze

$\sqrt{ax^2+b+c} = x+h$ aber soll dies sein so muss $(x+h)^2 = ax^2+b+c$ sein aber da kommt nicht ax^2 sondern x^2 vor, daher muss man $\sqrt{ax^2+b+c} = \sqrt{a}\,x+h$ setzen.

um den $\sqrt{a}$ der sehr unbequem ist zu meiden setze ich $\sqrt{ax^2+b+c}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}$

und nun setze ich $\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} = x+h$

Die kleine $\sqrt{a}$ ist unbequem weil man dann die allgemeine Wurzel [illegible] ~~Regeln~~ [illegible] die weitere Operation nicht zu [illegible] vorgenommen sein muss.

so ist $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = x^2+2xh+h^2$ so finde ich x ohne Wurzel

$x = \frac{ah^2-c}{b-2ah}$ so ist also $x+h$ auch ohne Wurzel ausgedrückt

also wird meine function in eine von h verwandelt und zwar in eine rationale, wenn man die Rechnung durchführt.

Man kann dies auch anders machen

$\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} = \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}$ dies setze ich

$=(x-\alpha)\cdot h$ dann ist $(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2\cdot h^2$

oder $(x-\beta)=(x-\alpha)h^2$ wo also x sich ohne Wurzel ausdrücken lässt.

2

$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ kann [illegible] [illegible] [illegible] werden

ist also $=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}}$

$\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} = x+z$ und suche x in z auszudrücken

I) $\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = 2xz+z^2$

$x=\frac{az^2-c}{b-2az}$ nun muss man differenz[illegible]

[illegible] dx in dz ausdrücken, oder da dies functionen [illegible] functionen von einem dritten sind! [illegible] kann x und z [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] oder den Gleichung I) ist deutlich, man kann sich also [illegible] x und z die functionen [illegible] [illegible]. daher ist die Gleichung [illegible] [illegible] die [illegible] [illegible] [illegible]

$\frac{b}{a}dx = 2\cdot x\cdot dz\cdot z\cdot dx + 2z\,dz$

dies nennt man eine Gl. differ. oder differential Gl.

NB
Jede Gl. ist [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] der Operation z.B. $(a+b)m = am+bm$ aber $a+b=a$ ist keine Gl.

und dieser Weg ist kürzer, demnach ist

$dx = \frac{2a.(x+z)dz}{b-2az}$ wo ich statt x, den Werth

setzen könnte, aber das ist nicht nöthig

dasselbe bekomme ich wenn ich obige Gl.

$x = \frac{az^2-c}{b-2az}$ differenzire

Differenzire ich eine Gl. von z und x so bekomme

ich nun eine von z und x von dz und dx

und aus beyden kann ich dann x eliminiren

oder die z, und fände ~~[illegible]~~ eine Gl. zwischen

x, dz und dx

setze ich statt der Wurzel x + z, und statt

dx den Werth so bekomme ich

$\frac{2a}{\sqrt{a}}\int\frac{dz}{b-2az}$ wo ich $b-2az = u$ setze und differ.

und die integration ist leicht verrichtet $= -\frac{1}{\sqrt{a}}\log(b-2az)$

statt z den Werth setzen $= -\frac{1}{\sqrt{a}}\log\left(b+2ax-2a\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right)$

sollte der log negativ seyn, so kann man gerade den positiven Werth setzen, weil es nur auf die Constante ist. sollte log von imaginer seyn dann würde die Formel unbrauchbar

diff: muss ich wieder die obige geben

$$-\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{+2a\,dx - 2a.\frac{1}{2}\frac{2x+\frac{b}{a}}{\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}}dx}{b+2ax-2a\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}}\right] =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{2a-\frac{2ax+b}{\sqrt{\ }}}{b+2ax-2a\sqrt{\ }}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{2a\sqrt{\ }+2ax+b}{(b+2ax-2a\sqrt{\ }).\sqrt{\ }}\right)dx$$

nur $=$ ist $\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{dx}{\sqrt{\ }} = \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

Ist nun der Logarithmand eine imaginäre Größe, dann müßte man sich umsehen eine andere Formel herauszustellen.

$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ich erinnere mich daß darin $z =$

$= \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$

also nun gestattet ist $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \text{arc} \sin z$

so müßte ich mein integral auch so umformen, ich setze statt $x = u+h$ um dh zu vernichten daß dx u aus fällt

ist $x = u+h$ so ist $dx = du$

$$au^2 + 2ahu + ah^2 + bu + bh + c$$ also muß $2ah+b = 0$, $h = -\frac{b}{2a}$

also ist h constant welches dx muß gleich $du + dh$, weil h von dem Variable unabhängig ist. also x wird $= u + \frac{b}{2a}$

dasselbe würde der Taylorsche Satz ergeben denn $ax^2+bx+c = f_x$ setze ich $x = u+h$ und $f_{u+h} = f_{h+u}$ durch die 2te [illegible] ergibt $f_h + df_h u + d^2 f_h \frac{u^2}{2} +$ alles übrige wird $=0$.

ah^2+bh+c. differenzial ~~[illegible]~~ gleich $2ah+b$. dann $=0$ gesetzt gibt $h = -\frac{b}{2a}$

(Fr. 173)

Denken u. Ausdehn[ung] ist negation. Affirmation absol[ut]
Ethic I Th. Schol. Prop. 8 – als bestimmte Realitäten
sind sie Negationen; Sp. begreift sie als Attribute die nicht
als eine Art seyn, sondern unaufgehobene Momente
[illegible] Ding in bestimmter Weise [illegible] – das
bestimmte ens reale, hoc est ut omne esse ut
practer. — Epist. 389 – Gott [illegible] zu kennen das
d. Dinge ist kein abgesondertes Ding. Man
kann ihn zutrauen, ebenso kann besondern
Denken als Bewußtseyn, wird nicht [illegible]
[illegible]. Materie ist – unendl. Ausd. d.
denken sind Eigenschaft: Gotts – unendlich Ding sind
nach jener 2 attribute Gotts. diese 2 [illegible]
[illegible] können an den Beziehungen d. Allg:
gehalten werden. – Weitere Entwicklung
d. specul: Inhalt 1) göttl. Sub 2) attr. Gotts, 3) modi
d. attribute
1) Sp. sagt daß in das Seyn Wesenheit der Existenz
involvirt, damit auf Anselmischen argument
quis essentia involvit Eth. XI Prop. – essentia et caus.
dem XX prop. Es ist keine nicht bis zu begreif[en]
[illegible] – die Wesen [illegible] d. [illegible]
an. Allein werden nicht Dinge [illegible]
[illegible] – [illegible] [illegible]
entschieden – die Subst: ist nur Ein. Die [illegible]
die d. [illegible] denken sind, sind [illegible].
[illegible] so kann das [illegible] Wesenheit nicht [illegible]
aber die Wesenheit enthält nicht die Wirklichkeit
oder Existenz sondern sie ist getrennt. Sie
[illegible] allmächtig [illegible]. Die [illegible] d. [illegible] u. [illegible]
sind [illegible].

folg

p. 443

erkennende [illegible] nicht [illegible] seine Wirklichkeit. Die
Substanz ist nicht selbst, die zur Existenz gebracht wird, sie
ist Existenz selbst. [illegible] [illegible] in einem und
demselben und auf gleiche Weise in allem. Die [illegible]
gegenwärtige [illegible] unmittelbar wieder aufgehobene
wieder Dualität ist Gott. Diese Substanz ist Princip aller
Wirklichkeit [illegible] selbst ist die Natur, nicht nur
das denkende Subject [illegible] nicht in Bestimmungen
der Endlichkeit [illegible] die einzige, [illegible] dem gewordenen
und werdenden zu Grunde liegt, dies ist natura naturans
die Bestimmtheit [illegible] in Einheit [illegible]
Unterschieden [illegible] ist [illegible] nat naturata – beyde
in ihrer Identität n. ns d. h. ist dem Gott [illegible] n. ns
ist das die [illegible], quod in se est et per se concipitur
Eth I Schol 29. prop. [illegible] in Endlichen [illegible]
[illegible] in der Natur ist der Raum [illegible]
der [illegible] beyder als [illegible] zu scheiden. [illegible]
[illegible] sich [illegible] [illegible]
[illegible] negation [illegible]! Wo die
unendliche Subst. zu ihren attributen [illegible]. gleich [illegible]
ist die Subst, nur n. ns d. Natur, sie ist der [illegible] nicht
als Werk. Sie ist causa sui dadurch ist alle Endlichkeit
in Gott aufgehoben. [illegible]
Gott. Gott [illegible] allein [illegible] Vollständigkeit der Natur.
Sie ist kein [illegible], [illegible] d. Mittel [illegible]
[illegible], [illegible] [illegible]
[illegible], Gott [illegible] [illegible]

dagegen sagt Spin. igni in infinitum vel [illegible]
[illegible]. Die Endlichkeit ist das endliche Bei
Veränderungsmerkmal, d. i. ein Begriff der Endlichk.
[illegible] entstehen und nicht. Ohne das Endl.
nicht ohne Unendl. seyn kann, schliest [illegible]
Substanz. oder [illegible] nicht hervorgebracht
denn müsste der Grund davon auch nicht seyn, denn in einigen
unmittelbaren, ist ewig unveränderlich, kein Endlich könnte
zur [illegible] Begriffen seyn. Gott hingegen ist immanente Urs.
d. Welt nicht zu denken in einem Begriffe. Die Subst. alles
[illegible] ist das unendl. [illegible] d. eine, aber die Natur
ist d. Univ. – d. All – Beydes ist nicht von einander [illegible]
Es ist doch All in einem, All Alles in Allem. Dies ist Gott
Mensch
das alles d. eine. Wer dann einen seht [illegible] um All
zu sehen, Beydes ist Gott. Spin. ist Panth.
x) Attribut. id quod intell. de subst. percipit, tanquam ejus | Eth: 4 Def.
das unendl. u. Unendl. in einem ist die Subst. das Positive = unendl.
die Substanz, wie sie natura naturans ist, hat zu ihrem Attribute
die unendl. Ausd. u. Denken, aber die Substanz hat zu ihren
Attributen noch den [illegible] sie nothwendigen Modus. Die
Einheit der beyden Att. unendl. Ausd. u. Denk. ist d. eine göttl. Wesen
= unter welchen beyden man Gott betrachtet – substantia cogitans et
extensa una eademque est subst. Eth p 92. Es fasst zwar der reine
Abstr., [illegible] kommt nicht zu Begriff des Ausdeh. u. Denken absolute
Prädicate Gottes sind. Der Gedanke ist att. dei sive deus est res
cogitans. Aber der [illegible] Gedanke ist nur ein modus, der Attr.
Gottes auf bestimmter Weise auszudrücken. Gott ist eine
Eigenschaft zuzuschreiben, die alle Eigenschaften involvirt. Das
Denken ist eins der unendl. Attr. Gottes [illegible]. Je mehr ein
denkendes Wesen denken kann um so vollkommener ist es

[illegible] nicht denkt [illegible] Eth. pag. 79. [illegible]
aller Dinge [illegible] auch [illegible]
nicht gedacht werden können. [illegible]
Dinge [illegible]
[illegible]
[illegible] Gedanken [illegible]
[illegible] Gott kann [illegible]
[illegible] nicht denkend [illegible] werden [illegible]
[illegible] denkend [illegible]
reale [illegible]
[illegible] Alle [illegible] Realitaeten der Substanz [illegible]
[illegible] Spinozismus [illegible] unmittelbaren [illegible]
Gott ist nicht [illegible] Gedanken [illegible]
[illegible] – Spin: ist realismus.
[illegible] Modus affectio substantiae sive id quod in alio est, per quod etiam concipitur
[illegible] 5 Def. [illegible] Substanz [illegible] möglich
[illegible] erkannt werden [illegible] Modus kann [illegible]
[illegible] aber als göttl. Attribute, [illegible] a priori [illegible]
[illegible] möglich. [illegible]
[illegible] Modus [illegible]
[illegible] aller Dinge [illegible] Willen [illegible]
[illegible] denken. [illegible] a priorische [illegible] voluntas
et intellectum Eth I 32 Corollar: 2. [illegible]
[illegible] absolute [illegible] enti [illegible]
[illegible] Willen [illegible]
actionibus per se considerati [illegible] Willen
[illegible] intellectus actu sive inf: sive finitus
ad nat. [illegible] referri debet per intell: enim Eth I prop 31
[illegible] Universum [illegible] Subst: [illegible] subjectiv
ist. [illegible] Dinge [illegible]
[illegible] denkt [illegible]

Die zweite Ableitung ist au^2.
Der Werth der Diff. Rechnung bringt man im Taylorschen Lehrs., der allgemeiner ist als der binom. Lehrs. denn er gehört für alle funct. das bin. gilt nur für funct $= x^m$

So wird $ax^2+bx+c = ah^2+bh+c+au^2$

$= c - \frac{b^2}{4a}$ $au^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$ und wird dies und die

nun setzen wir den 2ten Ausdr. $= \delta$ so wird

$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int\frac{du}{\sqrt{au^2+\delta}}$ und mache $au^2 = 1$

es wird $\int\frac{du}{\sqrt{\delta\left(1+\frac{a}{\delta}u^2\right)}}$ dann setzt man

$\frac{a}{\delta}u^2 = -z^2$ oder $\sqrt{\frac{a}{\delta}}\cdot u = z\cdot\sqrt{-1}$ differenzirt

wird $du\sqrt{\frac{a}{\delta}} = dz\cdot\sqrt{-1}$ dann wird unser Integral

$= \frac{1}{\sqrt{\delta}}\int\frac{du}{\sqrt{1+\frac{a}{\delta}u^2}} = \sqrt{\frac{-\delta}{a}}\int\frac{dz}{\sqrt{1+\frac{a}{\delta}u^2}} =$

$= \sqrt{\frac{-1}{a}}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \sqrt{\frac{-1}{a}}\cdot \text{arc} \sin z$ statt z den Werth von u, statt u den Werth von x

giebt $\sqrt{-\frac{1}{a}}$ arc sin $\left(x+\frac{b}{2a}\right)\sqrt{\frac{4a^2}{b^2-4ac}} =$

$= \sqrt{-\frac{1}{a}}$ arc sin $\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$

Wir wollen untersuchen ob der Nenner auszulassen ist?

arc. sin z + arc sin u = arc sin w, durch w wollen wir finden der Bogen sei ,z dessen Sinus = z ist u. s. f. so ist

,z + ,u = ,w   w ist Sinus ,w d. h.

$w = \sin(,z+,u) = \sin ,z . \cos ,u + \cos ,z . \sin ,u$

daher $w = z . \sqrt{1-u^2} + \sqrt{1-z^2} . u$

die arc sind unausgesprochene Formen der trig: Linien so wie Wurzel u. Log: unausgesprochene Formen sind zu Potenzen. ist nun u constant so wird $\sqrt{-\frac{1}{a}}$. arc sin $\left(z . \sqrt{1-u^2} + u\sqrt{1-z^2}\right)$

daraus erhellt, daß man den Nenner nicht auslassen kann.

Die meisten Integrale sind in Meyer Hirsch Integraltafeln, wo das Meiste übersichtlich ist.

Integrale der
die transcendenten Functionen sind entweder
bekannt oder nicht zu finden

$\int \sin x = -\cos x$ $\int \cos x = \sin x$, $\int \tan x$ ist
nicht zu finden eine andere Weise

$\int \tan x = \int \frac{\sin x \cdot dx}{\cos x}$ ich setze $\cos x = z$

dies andere ist nicht zu machen. diff. $-\sin x\, dx = dz$

also wird $-\int \frac{dz}{z} = -\log z = -\log(\cos x)$

2) $\int \sec x = \int \frac{1\, dx}{\cos x}$ wieder $\cos x = z$ diff also $dx = \frac{-dz}{\sin x} =$

$\frac{-dz}{\sqrt{1-z^2}}$. also wird $-\int \frac{dz}{z \cdot \sqrt{1-z^2}}$ doch muss

rational gemacht werden $1-z^2$ in Factoren

zerlegen. $(1-z)$~~(1+z)~~u quadrat $1-z^2 = (1-z)^2 u^2$ $1-z = (1-z)u^2$

daraus $z = $ … u rational [illegible]

so bekomme ich alles rational, oder man

kann so machen ich setze $1-z^2 = u$ diff

gibt $-2z\,dz = du$

$dz = -\frac{1}{2}\frac{du}{z}$

ich bekomme $\frac{1}{2}\int \frac{du}{z \cdot z} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(1-u)\,u^{\frac{1}{2}}}$ hätte ich

$1-z^2 = u^2$ gesetzt wäre [illegible] dann bekomme

ich $+\int \frac{du}{(1-u^2)}$ der Unterschied ist dass wenn

ich im integral durch 2 multiplic so wird $2\,dz$ oder diff von z^2

unter z^2 also [illegible] funct von z^2

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} = \frac{\frac{1}{2}}{1-u} + \frac{\frac{1}{2}}{1+u}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\log(1-u) + \frac{1}{2}\log(1+u)\right) = \frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u}$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{1-\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \int\frac{dx}{\cos x}$$

So geht auch $\int \cos x = \int \frac{1 dx}{\sin x}$ zu integriren

Das Integriren der Functionen ist so künstlich. ——

Hätte ich eine Gl. $y^2 - 2xy = x^2 - y + a$
so ist y leicht zu finden
aber ist $x\,dy + y = 0$. y zu finden
ist anders
bei jener hat man dy = einem Ausdr. der dx
enthielt also eine Gl. zwischen dy
und x. aber jetzt ist die Gl. zwischen
y und dy und x, und dies aufzulösen
um y ist der schwerste Theil der Integral-
rechnung. [illegible] [illegible] [illegible] folgenden
[illegible].

Erläuterungen einiger Redensarten in Integralrechn. nebst einer Lehre von den Constanten.

Wenn man ein Integral findet so addirt man C und setzt unendlich viel Integrale einer Function. man weiss nun nicht welches davon zu nehmen ist. Nun kann man ein bestimmtes herauszusuchen

Es sei $y = \varphi(x)$ und eine Linie erstreckt sich ... in A, theilt man die ... Axe in gewisse Theile, und bestimmt darauf die Ordinaten, so bilden die Endpunkte eine Curve, die PM ... man den Inhalt bestimmen. So ist, d. PQ = dx wenn unendlich klein ist. $y . dx$ ist = PN und dies ist der Zuwachs des Inhalts, ist der Inhalt = $f(x)$ so ist $df(x) = y\,dx$

$\frac{df(x)}{dx} = y = \partial f(x)$ und $f(x) = \int y\,dx = \int \varphi(x)\,dx$

addirt man dazu C so sind das alle Integrale den den Inhalt giebt ist nur eins davon das muss man näher bestimmen.

Ist $f(x)$ irgend eins der bestimmten Integrale so ist $f(x)+C$ = allen Integralen will ich den Inhalt haben von BC an bis PM damit $f(x)+C = BCPM$ werde so hat schon C einen bestimmten Werth das C finde ich wenn ich statt x irgend etwas setze, denn C ist dagegen unveränderlich denn muß einen neuen Werth für x setzen der mir $BCMP$ bekannt macht

x setze ich $= AB$ so wird die Formel 0 geben dann setze ich $x+dx$ so wird $CBPM$ nur nämlich zunächst ist $AB = a$ so wird

$0 = f(a)+C$ woraus ist $C = -f(a)$ also

$CBPM = f(x) - f(a)$, denn $f(x)$ muß vorläufig durch das Integrieren gefunden werden

Will ich den Inhalt A_1MP finden so setze ich $x = AA_1$ dann wird der Inhalt $A_1MP = 0$ u. s. f.

Wenn ich nun das Integral von $\varphi(x)\,dx$ soll nehmen ~~so genommen werden daß [illegible]~~ ausgebogen, setzt die ~~Constante~~ soll so bestimmt werden daß, der Inhalt $= 0$ ist.

Also ist schon ein bestimmtes Integral
die Constante ist so bestimmt, daß
das ganze 0 wird wenn $x = a$ ist.
also $f(x) - f(a)$ wo $x = a$ seyn muß
z. B. ist die Parabel durch $y^2 = px$ oder
$y = \sqrt{p}\, x^{\frac{1}{2}}$ gegeben und will ich
z. B. den Inhalt ABM bestimmen so
ist $\int y\, dx = \sqrt{p} \int x^{\frac{1}{2}} dx$ das inte-
grirt giebt $x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{p}$, will ich
ACB finden wo $AB = a$ so wird hier
$x = a$, das ganze 0, so wird der
Inhalt $BCOM = \frac{2}{3}\sqrt{p}\,(x^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})$ um
ABM zu finden so muß $x = 0$
also $= \frac{2}{3}\sqrt{p}\, x^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{p} \cdot x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\, xy$ d. h. ist wenn $AMB = \frac{2}{3}$ ...
Also sind die Integrale immer dieselben Function
$y^2 = px$, ...

Wenn man sagt ein Integral hört mit $x = b$ auf, so heißt es:
wenn ein Integral $\int \varphi(x)\, dx$ mit a anfängt so ist es
$= f(x) - f(a)$ denn das wird 0 wenn $x = a$ ist.
aber $f(b) - f(a)$ | ist eine Funct wenn $x = \pi(x)$ werth
andern Werthe | bekommt, wenn x andern Werthe bekommt

das Integral setzt nun ist ich in solche Punkt $x = b$ [illegible]
dann wird $\pi(x) = f(b) - f(a)$ z. B. will man den Inhalt
BM bestimmen wollen, und B bestimmte
Punkte sind, braucht man den Inhalt
$= f(x) - f(a)$ wenn $x = AP$, aber ist die
Linie AP bestimmt in Zahlen also
$= b$, so bekommen ich den Inh. $= f(b) - f(a)$
das kann ich nicht mehr diff. weil der
Ausdruck nicht mehr die Form, sondern
den Werth ausdrückt, das ist nicht mehr
function sondern Zustandsgrösse.
Es gibt also 2 Arten Integralen. das
besondere Integral, welches wird
die allen $f(x)$ dann das allg. $f(x) + C$
ist C bestimmt so ist ein besonderes
Integral. Beyde sind functionen v. x,
3tl. Das bestimmte Integral. Das wird
aus besondern Integral wird wenn x
bestimmt ist, das ist keine funct.
mehr. (definit). die Variations Rechn.
das einzige Buch in deutsch. [illegible] Dirksen
hat [illegible] über die [illegible] daß ob
bestimmte Integrale differenzirt.

Setzt man das Integral auf, so hat es angenommen müssen, d. h. daß die constante schon bestimmt ist.

Endlich das Integral sei zwischen den Grenzen a und b genommen. Gesetzt daß es mit $x=a$ anfängt, und endigt mit $x=b$ so muß das zwischen ist $\int \varphi(x)\,dx\,(b \div a) = f(b) - f(a)$

d. h. ich integrire bekomme wegen nun integral setze $x=b$ dann $x=a$ und ziehe das 2te vom ersten ab.

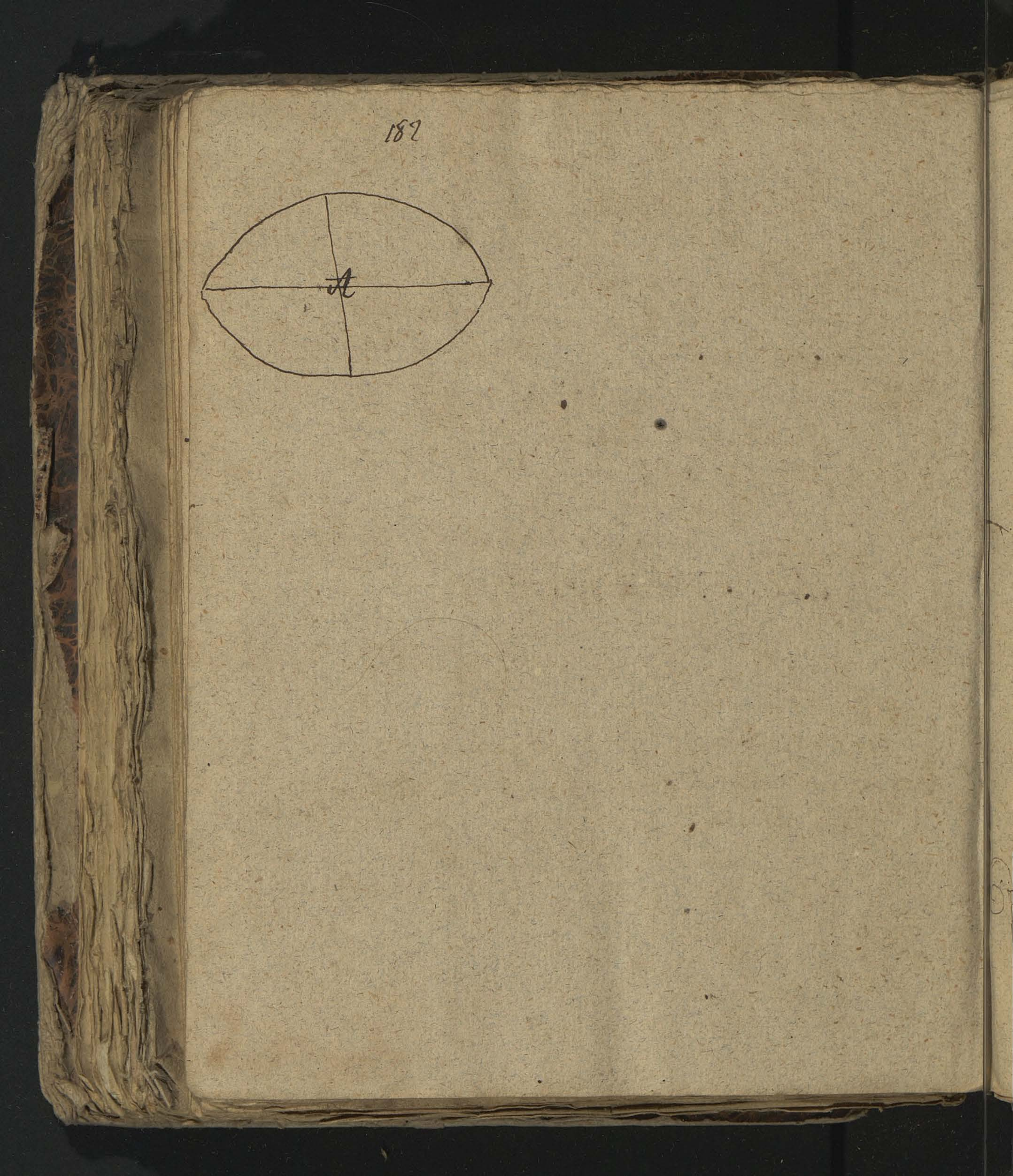
darnach wird ein besonderes integral so bezeichnet

$\int \varphi x \cdot dx\,(x \div a) = f(x) - f(a)$.

Anwendungen

Zur Bestimmung d. Inhalts der Ellipse

Die Gl: $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist eine Linie der 2ten Ordn. für welche daraus $y = \sqrt{\dfrac{a^2 \cdot b^2 - b^2 \cdot x^2}{a^2}} = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, ist $a > b$ und construiren die Curve setzen $x=0$ und berechnen y dann ist es $+b$ und $-b$ dann wo die Curve die Abscisse trifft ist dort $y \cdot 0$ und x wird dort $+a$ oder $-a$ und so construirt sich eine Ellipse


A

Die Constante braucht nicht constant zu sein, z. B. hätte ich eine Kugel wie eine Bombe, concentrisch hol, von materieller Rinde, wenn jeder Atom der Materie stets verbunden mit irgend einem Punkt, so sind 2 Fälle, der Punkt kann innerhalb oder außerhalb der Rinde liegen. Der Punkt wird nun eine Linie ausbringen, da er von allen Seiten Auge geschehen nach der Schwerkraft angezogen wird nun will ich den Weg [illegible] die Geschwindigkeit finden, ich finde die Angriffe aller Atome als ein Integral, integrire und bekommen unendlich viele Integral, nun soll die Const. x bestimmt werden nach Zweck. beyden Fälle führen nicht zu demselben ~~Integral~~ differentiell integrirt, aber für den einen und anderen Fall eine andere Constante, also ist die Const. nicht constant. Sie ist nur nach x constant.

Es bleibt nun noch zu erwähnen übrig: I. wie alle Die Functionen integrirt werden, die wir bis jetzt nicht integriren konnten. II. wir können Differentialgleichungen integrirt

Die [illegible] hat keine Schwierigkeit, ich verwandle die Function die ich nicht integr. kann, verwandle ich nach Mac-Laurinschen Reihe, in eine unendl. Reihe nach x, die ich integriren kann und zwar Integral, wieder eine unendl. Reihe bekomme

der Maclaurin'sche Satz ist $S\left[\left(\partial^{r} f(x)\right)_0 \cdot \frac{x^{r}}{r!}\right] = f(x)$

hier sind die Schwierigkeiten, daß ich den Cylinder verbrechen muß, und für einige Werthe von x, sind die folgenden Glieder im Wachsen.

Integriren der Differ: Gleichungen

Ist $y = f(x)$ so ist $\frac{\partial}{x} y = \frac{\partial y}{\partial x}$ weiter genommen wären nun eine Gl. $\left(x, y, \frac{\partial}{x} y\right) = 0$. so kann man statt $\frac{dy}{x}$ immer $\frac{dy}{\partial x}$ weiter setzen.

Ferner ist $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial}{x} y$, so kann ich eine Gleichung $\left(x, y, \frac{\partial}{x} y\right) = 0$ in eine Differential Gl. umwandeln. und umgekehrt.

Und jede Diff: Gl: wird die Form erreichen können $M dy + N dx = 0$, wenn M u N functionen von x u y. sind (oder nicht) ohne dx u dy

Kann ich jede Gl. $\left(x, y, \frac{\partial}{x} y\right) = 0$ kann ich nach $z = \frac{\partial}{x} y$ auflösen in x u y ausgedrückt

und es wird $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{d}{x}y = \frac{N}{M}$, wo das M auch = 1 sein kann

daraus ist: $M dy - N dx = 0$ wird zu bezeichnen wenn

dann das − kann auch + werden

Somit ist eine Diff: Gl. $|x, y, dx, dy| = 0$ und das einfachste

Form $M dy + N dx = 0$ zu bringen wäre schwieriger

wenn man sich aus der das Unendlichkleinen zu Hülfe

nehmen, durch Ableitungs Gl: welche auch die Diff: Gl:

sagen.

Um den Gl. $M dy + N dx = 0$ zu integrieren.

1te Methode ist durch das Trennen der Variable

[illegible] und daraus ein [illegible]

Es sei $x dy + y dx = 0$ so kommt es darauf an 2 Gleichungen, wo

andern Gl: ~~rechnen~~ erhalten die auch 2

in dem ersten das x in dem andern das y nicht

vorkommt man sich erlaubt nun ist durch x.y dividire

so wird $\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$ alles ist in 2 ausgedrückt

folgt $\int\frac{dy}{y} + \int\frac{dx}{x} = C$ d.i. = die Constante und es ist

$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ beyde sind nun 0, ~~[illegible]~~ so bekommen ich

man ich Integrale [illegible] Integrale deren Differenz der

Constante = ist.

$\int\frac{dy}{y} = \log y$ u. $\int\frac{dx}{x} = \log x$ also

$\log y + \log x = C$ oder $\log(x\cdot y) = C$ also $xy = e^c = C$

So reducirt man diese Integration von Gl: auf Integr. der functionen z. B.

A] $\varphi(x)\cdot\varphi_1(y)\,dy + \psi(x)\cdot\psi_1(y)\,dx = 0$ muss durch $\varphi x\cdot\psi_1(y)$ dividiren, so muss man dann oben genannt zu erreichen. die ges. Gl. A ist die allgemeine forme, in welcher sich die Variable trennen lassen. Oft lässt sich durch Einführung fremder variable diese allgemeine form herstellen.

z. B. $a\,dx + x\,dy = b\,dy - y\,dx$, nun lässt sich die Gl: auf die forme $M\,dx + N\,dy = 0$ bringen also mit d. auf der Gl. I) $(x-b)\,dy + (a+y)\,dx = 0$ nun setze ich $|x-b| = u$ u. $|a+y| = z$ differenz.

$dx = du$ u. $dy = dz$ also wird

$u\,dz + z\,du = 0$ muss $uz = c$ gibt den derselben gesetz $(x-b)(a+y) = c$

ich hätte ab trennen können hätte ich I) durch $(x-b)(a+y)$ dividirt

Aber ist $(a + by + cx)\,dx = (a_1 + b_1 y + c_1 x)\,dy$
wenn sich direct nicht trennen lässt, ich setze

$a + by + cx = u$ und $a_1 + b_1 y + c_1 x = z$ daß

$b\,dy + c\,dx = du$ und $-b_1 dy + c_1 dx = dz$

so wird die gegeb: Gl: wenn ich ermitteln daß

$$dy = \alpha\,du + \beta\,dz \text{ und}$$
$$dx = \gamma\,du + \delta\,dz$$

$$du(\gamma\,du + \delta\,dz) = dz(\alpha\,du + \beta\,dz)$$

demnach lässt sich die 3te Methode verwenden. nämlich statt [illegible] substituiren, gerade auszuführen.

Ich setze $z = v.w$ also ist $dz = v.dw + w\,dv$ und bekomme

$$(\alpha u + \beta vw)(v.dw + w\,dv) + (\gamma u + \delta vw)\,du = 0$$

nun kann ich aber einen variable [illegible], so setze ich

$\gamma u + \delta vw = 0$, daraus $w = -\frac{\gamma u}{\delta v}$ so stellt sich die 2te Gl [illegible] durch einen coeff lässt sich wegbringen und die letzte

$$v\,dw + w\,dv = 0 \quad \text{diese Gl: lässt sich in [illegible] trennen und integriren}$$
$$\frac{dw}{w} + \frac{dv}{v} = 0$$
$$\log wv = \log c$$
$$wv = c$$

Die 2te Gl ist $\gamma u + \delta vw = 0$ die [illegible] Gl: zwischen z und u, weil in der ursprünglichen Gl: $\gamma u + \delta vw = 0$ schon u weggestellt

man setzen daher $w = u$ also $dw = du$ (in $z - Nw$)

und $z = v.u$ und es wird

$$(\alpha u + \beta v u)(v\,du + u\,dv) + (\gamma u + \delta v u)\,du = 0$$

daraus

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha + \beta v)\,v \\ + \gamma + \delta v\end{array}\right\} du + (\alpha + \beta v)\,u\,dv = 0$$

variable separirt

$$\frac{du}{u} + \frac{\alpha + \beta v}{\gamma + (\alpha + \delta)\,v + \delta v^2}\,dv = 0$$

(durch gebrochene Funct.)

integrirt

$\log u + \log(\ldots v \ldots) = \log c$ eine Gl. zwischen v und u welche zurückgeführt eine Gl zwischen z und w $z = v.u$ in eine zwischen z und w umgewandelt lässt sich nach wie früher

Dieses auf das Verfahren $z = vu$ zu setzen gilt bei allen homogenen Gleichungen d.h. bei welchen die Coeff. von dz und dw aus z und u in jedem Gliede und in einer Dimension enthalten — denn dann lässt sich durch u eine ungerade dividiren

Anwendungen.

Es sei gegeben $d^2y = x^m$ und es soll y gefunden werden integr.

$dy = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ dies integrirt

$$y = \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + Cx + D$$

Aber ist Gl. zwischen d^2y, dy, y und x gegeben, so ist die Sache nicht so einfach, dass man eine diff Gl. der 2ten Ordn. d. i. solche wo zugleich x und y auch dy und d^2y vorkommen oder noch x gemeint. ist dies y nicht so ist diff Gl. der ersten Ordn., denn $dy = z$ so wird $d^2y = dz$

$Ay + Bdy + Cd^2y + Dd^3y = 0$ wo A, B, C, D noch x constant sind, $y = f(x)$ ist. Solche Gl. kommt in höherer Astronomie vor. Nimmt man die Gl.: $Ay + Bdy + Cd^2y = 0$ wo also hinlänglich x einzig vorkommt so setze ich $y = e^{mx}$ (e die basis d. logar. m ist ein unbestimmter Ausdruck vorläufig noch x const. dann ist $dy = e^{mx}.m$ und $d^2y = m^2e^{mx}$ dies in die Gl.: gesetzt gibt $Ae^{mx} + Be^{mx}m + Cm^2e^{mx} = 0$ oder

$$A + Bm + Cm^2 = 0$$

durch Gl. durch ich nur m verschaffen

190 $m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4AC}}{2C}$ woraus sich ergiebt

daß m wirklich von x constant sind

durch Voraussetzung zurück wenn ist $y = e^{mx}$

setzt. daß man auch solche Ausdrücke kommt

lässt den Gegenwärtigen. ist der eine Werth

von m, m_1 der andere m_2 so sollen wir

zwei Integrale auch immer gefunden, deren

Differenz nicht constant ist, sondern es sind 2 qualitativ

verschiedene Integrale

Setzen wir $y = \alpha e^{m_1 x}$ α von x unabhängig

dann wird $dy\ \alpha m e^{m_1 x}$, $d^2y\ \alpha m^2 e^{m_1 x}$ und

das giebt die Gl: $A + Bm + Cm^2 = 0$ welche erfüllt

ist [illegible]

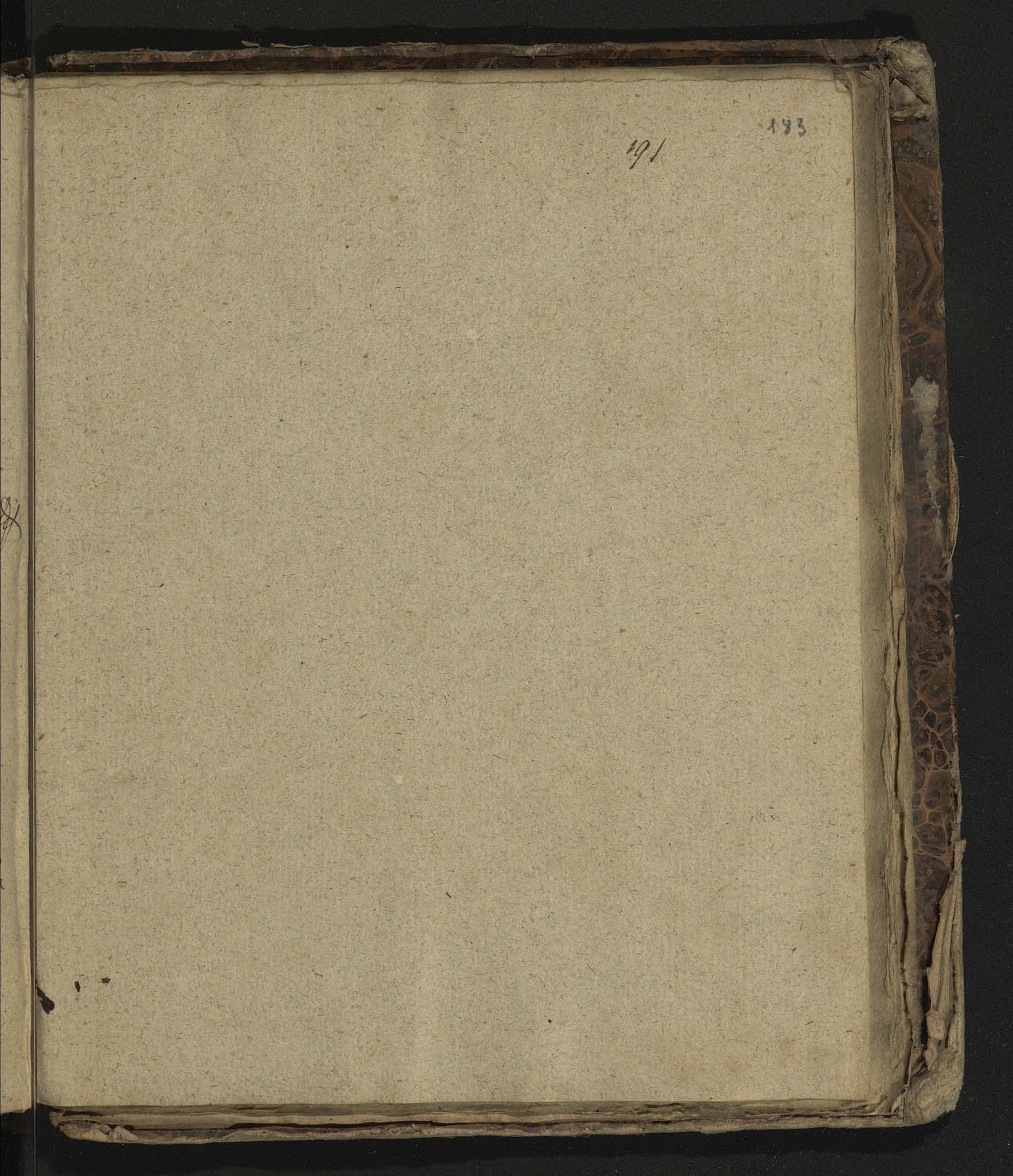
Setzt man $y = \beta e^{m_2 x}$ so genügt auch dies der Gl.

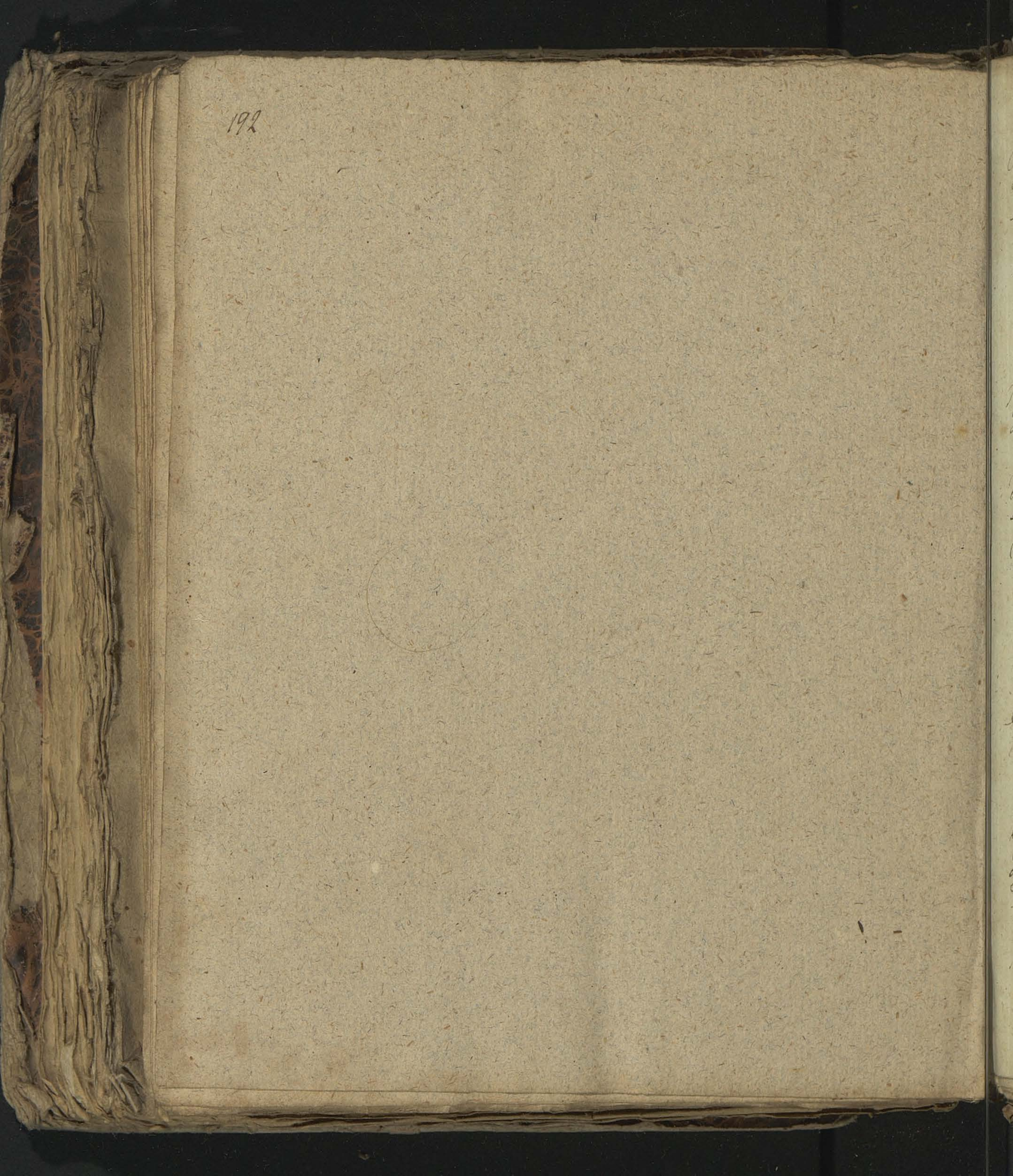
Man kann $y = \alpha e^{m_1 x} + \beta e^{m_2 x}$ setzen, und dies

ist schon das allgemeinste Integral mit 2 Constanten

indem auch einer Gl. der 2. Ordn. das allgemeinste

Integral 2 Constante mit sich führt





Ist die Gl. $Ay + Bdy + Cd^2y + Ed^3y = 0$ so ist 193

$y = e^{mx}$
$dy = m \cdot e^{mx}$
$d^2y = m^2 \cdot e^{mx}$
$d^3y = m^3 e^{mx}$

$\Big\}\; A + Bm + Cm^2 + Em^3 = 0$

daraus folgt m dreifache $m_1 | m_2 | m_3$ so ist

$y = \alpha \cdot e^{m_1 x} + \beta \cdot e^{m_2 x} + \gamma e^{m_3 x}$

Wenn die Differ. Gl. der m^{te} Ordn. ist, d. h. d^m vorkommt, so muss auch das Integral m willkürliche Constante enthalten.

Solche Gleichg nennt man Lineärgleichungen, weil keine Potenz von y und dy auch kein Product derselben vorkommen und eine Gl. $dy + \beta y + \gamma = 0$ stellt eine gerade Linie vor. Wenn auch die Coeff A, B, C, D, nicht constant wären sondern $f(x)$ wären sie Linear.

Hat man die Gl. $Ay + Bdy + Cd^2y = \varphi(x)$ wo A, B, C nicht x constant sind, ist zu integriren oder die function statt y suchen damit die Gl. richtig ist.

Wären $\varphi(x) = 0$ so wäre das Integral $y = \alpha e^{m_1 x} + \beta e^{m_2 x}$

α und β von x unabhängig. ist x nicht 0 so soll das Integral gleichfalls dieselbe form mit dass α und β von x abhängig sind. Ist dies so differenzire ich die Gl.

$dy = \alpha m_1 e^{m_1 x} + e^{m_1 x} d\alpha + \beta m_2 e^{m_2 x} + e^{m_2 x} d\beta$

bestimme nun α und β solche $f(x)$ so, dass $(e^{m_1 x} d\alpha + e^{m_2 x} d\beta) = 0$ wird so ist mein y die form wie derselbe zu integriren wo α und β constant wären.

nun finde ich d^2y so wird

$$d^2y = \alpha m_1^2 \cdot e^{m_1x} + \beta m_2^2 \cdot e^{m_2x} + m_1 e^{m_1x} d\alpha + m_2 \cdot e^{m_2x} d\beta$$

wobei α und β wiederum [illegible] [illegible] machen. Nun setze ich die Werthe statt y, dy und d^2y, dann hebt sich alles auf und bleibt II) $C.(m_1 e^{m_1x} d\alpha + m_2 e^{m_2x} d\beta) = \varphi(x)$

denn für den Fall daß $Ay + Bdy + Cd^2y = 0$ ist

$$y = \alpha e^{m_1x} + \beta \cdot e^{m_2x}$$

ist wenn α und β nicht constant so ist dy von 4 Gliedern aber der 2 sind $= 0$, d^2y hat auch 4 Glieder welche alles wird $= 0$ denn $Ay + Bdy + Cd^2y$ ist $= 0$ wenn α und β constant sind, ist α und β nicht constant so ändert sich nur d^2y in 2 letzten Gliedern.

Ich setze die 2te Gleich dazu

III. $e^{m_1x} d\alpha + e^{m_2x} d\beta = 0$

nun haben wir 2 Punkt für α und β zu finden die den Gl. II und III genügen, wenn geht, denn es sind 2 algebr. Gl. von 2 unbek. dα und dβ multiplizire ich III mit $C.m_2$ zieht III von II ab gibt

$$C(m_1 - m_2) e^{m_1x} d\alpha = \varphi(x)$$

$$d\alpha = \frac{1}{C(m_1 - m_2)} \frac{\varphi(x)}{e^{m_1x}}$$

Dieses wird nun integrirt wenn es möglich ist wenn $\varphi(x)$ eine Potenz von x ist dann giebt es

$d\beta$ durch Vertauschung von m_1 und m_2

wird $d\beta = \frac{1}{(m_2 - m_1)} \cdot \frac{\varphi x}{e^{m_2 x}}$

Das ist das Verfahren der Variabilitaet der Constanten, was ein schlechter Ausdruck ist, indem die const: nie variable sind. Ich vermuthe die Form des Integrals und bestimme α und β, welche waren zu const: und nun werden sie $f(x)$, dadurch sind sie aber nicht variable geworden.
La Grange machte das zu erst, andere schrieben ihm nach, ohne den Grund zu wissen
Die Diff: Gl: $= 0$ ist dann die Bewegung eines Planeten wenn sie nur von der Sonne abhängt, die Gl $= \varphi(x)$ ist wenn sie auch andere Planeten einwirken. Diese war die Bahn Ellipse, jetzt könnte sie auch seyn wie daß die veränderlich ist von der Gestalt das sind die Perturbationen

Integration durch unendliche Reihen

Diese Methode ist Beispiel des Taylorschen Satzes

z. B. es sei $f(x) = \int \varphi(x) \cdot dx$ wo $\varphi(x)$ gegeben ist und $f(x)$ gesucht w. Nach Maclaurin's Satz ist jede $f(x)$ = einer Reihe nach x entwickelt. also

$$f(x) = f(x)_0 + (\partial f x_0) \cdot x + (\partial^2 f x_0)\frac{x^2}{2!} + (\partial^3 f x)_0 \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$\partial f(x)$ ist aber nach der Regel $= \varphi(x)$ weil $f(x)$ Integral von $\varphi(x)dx$ ist. und so ist $\partial^2 fx = \partial\varphi(x)$ u. s. f.

Also sind alle Coeff. der Reihe gegeben und nur bekannt.

$f(x) - f(x)_0$ = dem gegebenen ist aber $f(x)$ ein Integral so ist es auch $f(x) - f(x)_0$ weil $f(x)_0$ nach x constant ist, weil es x nicht enthält. also ist $\int\varphi(x)\partial x = C + (\partial f(x)_0) x + (\partial^2 f x_0)\frac{x^2}{2!} + \dots$

Nur ist hier die Bestimmung der Constante im Fall der Anwendung sehr schwer. Die Constante ist $= C = f(a) - f(x)_0$ aber $f(a)$ ist unendliche Reihe nach a ist $a = 10$ so ist die Const nicht zu finden, und also nur wenn a ein kleiner echter Bruch ist, ist die Reihe von Werth. Aber die Reihe hat dann Werth, daß dadurch bewiesen wird, daß wenn ein Integral $f(x)$ ist $f(x) + C$ alle sind.

z. B. $f(x)$ u. $F(x)$ seien 2 Integrale von $\varphi(x)$
nun ist $f(x) - f(x)_0$ die Reihe ebenso ist
$F(x) - F(x)_0$ auch die Reihe also ist

$$F(x) = f(x) + \left(F(x)_0 - f(x)_0\right) = f(x) + C$$

also sind jedesmal 2 Integrale von einander nur um eine Constante verschieden

Ist eine Gl. zwischen $\left| x, y \text{ und } dy \right| = 0$ daraus y zu finden als $f(x)$ die der Gl. genügt. dann muss die Reihe

$$y(x) - y_0 = \left((dy_0)\right) x + \left(d^2 y_0\right)\frac{x^2}{2!} + \left(d^3 y_0\right)\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

nun kann ich aus der Gl. dy finden weil gegeben [illegible] x und y d. h. $dy = (x, y)$ durch Differenziren ich [illegible] $d^2 y =$ zwei Ausdrücken der eine mit $\frac{dx}{dx} = 1$ und der andern $\frac{dy}{dx}$ multipl. aber $\frac{dy}{dx} = (x, y)$ so ist $d^2 y = (x, y)$ ebenso $d^3 y = (x, y)$. Setze ich (nach Maßgabe: Reihe) $x = 0$ und setze y dort wo dann y wird wenn $x = 0$ ist, d. h. $y = y_0$, so wird Gl. zwischen x, y und beliebigen Constante die durch y_0 vorgestellt wird
$y - y_0 = dy_0\, x + d^2 y_0 \frac{x^2}{2!} + \ldots$ so ist dy_0, $d^2 y_0$ etc. Funct. von y_0 für die beliebig. findet man y_0 [illegible]
So kann man die Diff. Gl. 1. Ordn. integriren was unbequem für die Praxis ist. aber

~~dadurch kann man wahrnehmen dass jede Diff. Gl.~~

Ist $f(x)$ ein Integral so ist $f(x)+C$ auch ein
ist $x=0$ so wird fx_0 u. fx_0+C das
erste bezeichnet y u. y giebt das
2te y_0 u. y_0 so daß für $y=f(x)$ $y_0=fx_0$
ist u. $y=f(x)+C$ $y_0=fx_0+C$

Dasselbe im Beispiel

ist $xdy=y$ zu integriren, man könnte es durch Trennung der Variable gleich, aber wir brauchen hier die obige Methode
denn ist $y=cx$ die Diff. giebt $dy=c$ u.
das in $y=cx$ gesetzt giebt $y=xdy$
aber aus $xdy=y$ ist $dy=\frac{y}{x}$ dies diff.
giebt $d^2y=\frac{xdy-y}{x^2}$ darin $\frac{y}{x}$ gesetzt
giebt $d^2y=0$ so ist $d^3y=0$ $d^4y=0$ u. s. f.
dies hineingesetzt in die Gl.

$$y-y_0=dy_0\,x+d^2y_0\frac{x^2}{2!}\ldots$$ giebt

$$y-y_0=\frac{y_0}{0}x+0+0+0\ldots$$ dabei wären

die gebrochenen Diff. Gl.: aber es ist der 0 in diesem
[illegible] kein Fall

oder $\frac{y_0}{0}$ war das $\frac{y}{x}$ wenn ich $x=0$ setzte so mußte $\frac{y}{x}$ die form haben $\frac{y}{x} = \frac{\alpha \cdot y_1}{x} = y_1 = c$ so wird

$y = cx$

diese Methode dient dazu zu beweisen — — —

daß jede diff Gl. wenn man sie integrirt einen Integral Gl. giebt worin x, y vorkommt und eine einzige Constante

der Macl. Lehrsatz dadurch hervor daß ich im Taylorschen $x=0$ setze, das ist aber nicht beschränkt, denn x ist schon bestimmt, besser ist wenn ich $x=\alpha$ setze, und da α alle möglichen haben. dies ist eine mathem. und diplomatische Kunst alles so bestimmen, daß alles noch immer daraus werden kann. ist der Taylorsche Satz

$y_{x+h} = y_x + dy_x h + d^2y_x \cdot \frac{h^2}{2!} + d^3y_x \frac{h^3}{3!} + \ldots$ setze ich $x=\alpha$ und h ganz von mir abhängig ich setze also $h = x-\alpha$ so wird ich

$y_{\alpha+(x-\alpha)} = y_\alpha + dy_\alpha (x-\alpha) + d^2y_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + d^3y_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \ldots = y_x$

ist $\alpha = 0$ so ist der Satz der Maclaurinische, nur muß ... der Nenner nicht 0 werden.

Das muß d. vorige bezogen $\alpha dy = y$, $dy = \frac{y}{x}$ u. s. f.

gibt $y_x - \frac{y}{\alpha} = \frac{y_\alpha}{\alpha} x$ ist $\frac{y_\alpha}{\alpha} = c$

wird auch $y_x = \frac{y_\alpha}{\alpha} x + y_\alpha$ | $y = cx + c\alpha$ wo ich

nun $\alpha = 0$ setzen muß.

Anmerkungen

Bei Anwendungen wird ich ein Diff. $\varphi(x)$ haben so will ich gewöhnlich nicht das integral $f(x)$ haben, sondern ein bestimmtes Integral in gewissen Grenzen eingeschlossen z. b. den Inhalt der Curve zwischen zwei bestimmten Ordinaten. Das volle Integral ist $f(x) + C$, will ich nun ein bestimmten Inhalt so ist Anfang $f(x) - f(a)$. dann wird das x noch bestimmt u. d. Integral ist $f(b) - f(a)$ und das gibt den ganz bestimmten Inhalt. Das ist das Integral v. $\varphi(x)$ zwischen den Grenzen a u. b, dann ist es nicht mehr funct. von x sondern ein bestimmter Zahlenwerth. dazu bedient man sich nun immer des Taylorschen Lehrsatzes

So hat den Ausdruck $\int_{b \div a} \varphi(x)\, dx$

das unbekannte $f(x)$ ist dann Taylorsche Reihe entsprechend

$f(x+h) - f(x) = \varphi(x)h + d\varphi(x)\frac{h^2}{2!} + \ldots$ $x = a$ wird

$f(a+h) - f(a) = \varphi(a)h + d\varphi(a)\frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots$

ist doch h unendlich klein, so daß die höheren Potenzen von h dagegen ganz weggelassen werden können. so wird

$$f(a+h)-f(a) = \varphi(a).h$$

Setze ich in dem Taylorschen Satz statt x = a + h so wird, da h sehr klein (unendlich)

$$f(a+2h)-f(a+h) = \varphi(a+h)h$$

Setze ich dann x = a + 2h so wird

$$f(a+3h)-f(a+2h) = \varphi(a+2h)h$$ u. s. f. bis ich bekomme

$$f(a+nh)-f(a+(n-1)h) = \varphi(a+(n-1)h)h$$ alle Gleichungen addirt

1) $f(a+nh)-f(a) = h(\varphi_a + \varphi_{a+h} + \varphi_{a+2h} \cdots \varphi_{a+(n-1)h})$

(φ_a wird aus $\varphi(x)$ wenn man statt $x = a$ setzt)

nun nehme ich n so groß daß $a+nh = b$ wird d. h. $h = \frac{b-a}{n}$

folgt aus 1). $f(b)-f(a) = h(\varphi_a + \varphi_{a+h} + \cdots \varphi_{a+(n-1)h})$

$= \int_{b \div a} \varphi(x).dx$ wie dies praktisch hervorgeht ist.

Dieser Satz ist der Ursprung des Ausdrucks das Integral (oder Summe)

denn der Ausdruck unter h(. . . .) ist $\varphi(x)dx + \varphi(x)dx + \varphi(x)dx$

$+ \varphi(x)dx \ldots$ für x die verschiedenen Werthe genommen

a, a+h, a+2h . . .

darstellen die Figur. ist die Curve durch $y = \varphi(x)$ gegeben so ist der Inhalt zwischen b und a d.h. für $x = a$ und $x = b$, so ist der Inhalt die Summe aller ordinaten für verschiedene Werthe zwischen a und b genommen, oder aller Rechtecke zusammen, die Inhalt der Länge nach gerechnet wenn die Anzahl der Rechtecke recht groß ist. Oder man kann Rechtecke bilden wenn ich mit $\varphi a + h$ anfange und mit $\varphi b + h$ aufhöre, wird die Summe der Rechtecke größer. die Summe der Differenzen durch 2 dividirt giebt größeren Fehler

Dies ist aber nicht sehr praktisch, denn ist $b - a = 6$ und soll die Genauigkeit auf $\frac{1}{1000}$ sein so muß $n = 6000$ genommen werden also $h(\;)$ hätte die Parenthese $6000-1$ Glieder. die zu berechnen sind.

Anwendungen auf Raumgrößen

Ist nun φ $y = \varphi(x)$, so daß für $x=1$ y imaginär $x=2$, $y=0$ $x=3$ $y = 2\frac{1}{2}$ u.s.w. giebt, so bildet sich eine Curve. Man stellen wir eine ~~Fläche~~ Curve von bestimmtem Flächeninhalt ~~Linie~~ bilden die, die Curve welche durch die Gl. gegeben ist, ein S. M. ...

das gegebene Gesetz kann gerade Linie sein, oder eine Parabel oder eine Ellipse etc. wobei die Lage und Gestalt der Linien gesucht wird. das Gesetz wird durch eine Gleichung gegeben zwischen x und y, wo die Gl. unendliche Curven und Linien giebt je nachdem die Coefficienten außer x und y welche man Parameter nennt, verschiedene Werthe annehmen können, indem x und y veränderlich sind. Da ist die Form der Gl. das Gesetz, die Bestimmung der Parameter eine bestimmte Curve. So daß ich bei jenen Aufgaben nur die Parameter suche. Oft wird Gesetz und specielle Form der Curve zugleich gesucht.

Es sei denn eine Curve durch $y = \varphi(x)$ gegeben das Gesetz der Curve, die die erste in M trifft, ist gegeben durch $y^2 = \frac{d}{x} - px + \sqrt[3]{q \sin x + bx^2}$ | oder $y_1 = \psi(x_1)$

und es sollen die Coeff $d, p, q, b,$ bestimmt werden. In der ersten Gl $y = \varphi(x)$ sind beide zugleich veränderlich mit x und y, in der 2ten sind noch unbestimmte Coefficienten.

Wir nehmen eine Eigenschaft der die Parabeln aufsucht, die Kegelschnitte ausgeschlossen. Die Curve sei gegeben [ausgedrückt] zwischen x und y.

Geometer drücken es aus: geht jeder P. O ein Centrum des Kreises, der die Curve in M berührt; aber nur ein Kreis ist da, der mit der Curve die engste Berührung hat. Grade dieser Kreis heißt der Krümmungskreis. Wenn das Centrum dieses Kreises in Q. Nun sei AP = x PM = y und die Gl. $y = \varphi(x)$. Der Mittelpunkt des Kreises ist bestimmt durch Coordinate AQ_1 u. QQ_1. Irgend ein Punkt N der Peripherie ist bestimmt durch Coordin. NR u. AR. AR sei $= x_1$ u. $RN = y_1$ und nun müssen wir zwischen x_1 u. y_1 eine Gl. bilden. Die ist, weil $QN^2 = QS^2 + SN^2$. Es sei $AQ_1 = a$ u. $Q_1Q = b$ wenn Q gesucht oder gegeben ist. So ist QM gegeben oder gesucht $= c$ dann wird $QN^2 = QS^2 + SN^2 =$

$$c^2 = (y_1 - b)^2 + (x_1 - a)^2$$

Dies ist die Gl. für den Kreis, dann ich mag für y_1 x_1 alles setzen so kommen Constante c heraus d. h. Radien

Wir suchen nun a, b, c weil das nicht gegeben sondern gesucht werden.
$x+\ldots = \alpha$ die gegebene konstante Abscisse des P. M.

Zur Berührung ist nöthig daß $y_\alpha = \eta_\alpha$ und $dy_\alpha = d\eta_\alpha$ d. ist eine Berührung der 1. Ordnung
$(d^2y)_\alpha = (d^2\eta)_\alpha$ da haben die Curven die Berührung der 2ten Ordnung. Bei unserem Kreise werden 3 parameter gesucht, hier haben wir 3 Gleichungen und so hat der [illegible] die Berührung der 2t Ordnung mit der Curve.
Ich würde nun die Gl. $c^2 = \ldots$ nach y_1 auflösen $y_1 = \varphi(x_1)$ und dann differenziren. Allein das ist nicht [illegible] man differenzirt die Gl gleich nach x

$$c^2 = (y_1-b)^2 + (x_1-a)^2 \quad \text{dff.}$$

$0 = 2(y_1-b)\cdot dy_1 + 2(x_1-a)$ weil $dx_1 = 1$ ist. weil wir den Abl nach x [illegible] schreiben wir dx_1 als Factor, so wird der Abl genommen nach [illegible] ich dividire durch 2 und eliminire und finde dy_α und muss noch d^2y_α finden. ich differenzire die Gl

$0 = (y_1-b)dy_1 + (x_1-a)$ [illegible] weil 0 [illegible] ist. differenzirt nach x_1 wird $0 = (y_1-b)d^2y_1 + dy_1^2 + 1$. der differentialquotient $d^2y_1 = \frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ und $dy_1 = \frac{dy_1}{dx_1}$

Wir sollen nun 3 Gl. gefunden $c^2 = | 0 = | 0 = |$
woraus sich y, dy, u. d^2y finden u. d. unbestimmte
Größe ich α setzen werde. Nun kann ich statt
der Gl. $y_\alpha = y_\alpha$ ..., wo y_α aus der Gl. $y = \varphi(x)$ ge-
nommen sind $x = \alpha$ gesetzt, die 3 Gl. $c = | 0 = | 0 =$ und setze
ich statt y, y u. statt x, x.

Wünscht sich nun ich statt $y = \varphi(x)$ die ... Gl
haben $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ dazu ich den Gl nicht in
y aufzulösen brauchen und dann nach diff. finden
ich diff. ... der Gl das giebt $a^2ydy + b^2x = 0$, noch
mal diff. $a^2yd^2y + dy^2 + b^2 = 0$, wo nun 3 Gl
y, dy u. d^2y zu finden sind!

Die 3 Gl. oben $(y-b)^2 + (x-a)^2 = c$

$$(y-b)dy + (x-a) = 0$$

$$(y-b)d^2y + dy^2 + 1 = 0$$

statt x, α gesetzt, daraus ist

$$(y-b) = -\frac{1+dy^2}{d^2y}$$ wo y gleich zu finden ist,

wo d^2y aus 2maliger Diff. des $y = \varphi(x)$ und dy^2 aus
Diff. derselben Gl. sich ergiebt statt x α gesetzt

Werthe ist $x-a = +\frac{1+dy^2}{d^2y}dy$, wo auch nichts mehr
verschwunden ist als α und a. Die 2 Werthe in die Gl.
gesetzt geben c, $c = \frac{(1+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y}$, c ist der Radius oder
Krümmungs ½ Messer (?). So sind die 3 parameter gefunden
also der Kreis. Allein diese 3 Param. sind func. v. α, welche die 3
letzten Gl., d. h. sind die Abschnitte d. Kr. M. Wird nun der
P. ein anderer genommen, d. h. die Absciss α oder x wächst und
nach geändert, so bekomme ich auch einen andern Mittelpunkt
d. Kreises. Nun soll die Linie bestimmt werden die Punkte
des stetig rückenden Centrums, d. h. die Gl. dieser Curve zu
finden, wir wollen sie Mittelpunktcurve nennen auf dieselben
Axen bezogen. So muss ich eine Gl. zwischen a und b den
Coordinaten d. Centrum bilden, welche sich findet wenn
ich aus 2 Gl. α eliminire, d. i. aus

$$(y-b) = -\frac{1+dy^2}{d^2y}$$

$$(x-a) = \frac{1+dy^2}{d^2y}dy$$

wirklich eliminiren wird kein Analyt. Es besteht die Gleichungen
ich setze x oder α in verschiedenen Werthe und finde zugleich
a und b, doch ist auch [illegible] zur Verzeichnung d. Curve.
Noch eine Aufgabe ist, wenn die Curve $y = \varphi(x)$ ist
so ist die Gl. einer geraden Linie die die Curve in M.
berührt. $y_1 - y = dy(x_1 - x)$, dann $x = \alpha$, $y = y_\alpha$

Nun will ich von dem Mittelpunkt einer gradlinigen Tangente ziehen die durch einen P. M geht.
x_2 u y_2 seien Coordinaten eines P. der gradlinig: Tngte

$\frac{\partial b}{a} = \frac{\partial b}{\partial a}$ nach x so ist $y_2 - b = \frac{\partial b}{\partial a}(x_2 - a)$
$\frac{\partial b}{\partial a}$ nach beliebigen Variabel

Aus der Theor. der Coord: ist $y = Ax + B$ die Gl einer gr. Linie, soll die Linie durch einen punkt M gehen dessen Abscisse p Ord q ist, so ist statt x u y p u q gesetzt die Gl $q = Ap + B$ und diese subtrahirt von der 1. Gl wird

$$y - q = A(x - p)$$

nach einander eine Gl der graden Linie ist diese Linie soll jetzt Tangente, geht aber nur durch den P. M. Hat man gerade von dem Punkte M die Gl für gradlinige Tngte haben will so seien x_2 u y_2 die Coord. der P. der grad. Tngte

die Tangte

Die Tangente soll gelegt werden durch den Punkt N dessen Coord x d y sind so wird

$$y_1 - y = A(x_1 - x)$$

Die Gl. sein die durch den P. N geht dem A verschiedene Werthe gegeb. werden verschiedene Linien nun muss A so gefunden werden dass die Linie Tangens wird, so muss $A = \frac{\partial}{a} b$ nach dem Obigen

Damit die Linie Tangente sey muss $A = \frac{\partial}{a} b$ sein, ist der P. M oder N durch welchen die Tangente geht so ändert sich nur [illegible] so

wo noch $\frac{\partial}{a} b = \frac{\partial b}{\partial a}$ nun ist $\frac{db}{x}$ und $\frac{da}{x}$ zu finden die Gl $(y-b)dy + x - a = 0$ ist ident.

man [illegible] a und b die $f(x)$ die sich aus Gl 2 und 3 ergeben, [illegible] a und b einschl. unter derselben Voraussetzung ist auch die Ablg identisch 0.

Die Ablg von 2) nach x, wo auch y, und dy, a und b funct. v. x sind Diff. nach Formel II und III.

Die Ablg von y, dy und x ergibt die Gl 3. und der ist identisch 0, also bleibt a und b zu diff dadurch wird

1) $(y-b)^2 + (x-a)^2 = c^2$

2) $(y-b)dy + x - a = 0$

3) $(y-b)d^2y + dy^2 + 1 = 0$

$$c = \frac{(1+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y}$$

dass wenn [illegible] ist die Curve concav, wenn c negativ die Curve convex [illegible] ist muss [illegible].

$-dy \cdot db - da = 0$ woraus $\frac{db}{da} = -\frac{1}{dy}$

so wird $y_2 - b = \frac{db}{da}(x_2 - a)$ genommen als

I) $y_2 - b = -\frac{1}{dy}(x_2 - a)$ die Gl. d. geg. Tgte

dieser Linie steht senkr. auf der Lin.

II) $y_3 - y = dy(x_3 - x)$ weil [illegible]

der eine Coeff A der andere $-\frac{1}{A}$ ist.

wie Coord. lehren. Da nun I) die Gl. der

Tgte der Mittelcurve und II) der Tgte d.

gegeb. Curve ist. So ist d. merkw.

Resultat die Normale ist so der Tgte

der Mittelpunkt Curve

b ist völlig bestimmt, x u. y sind veränderlich, weil M beliebiger P. d. grad. Lin. ist. So ist auch c immer bestimmt

$\frac{y}{b+x} = tg\alpha = \frac{c}{b}$ dies ist die Gl. für grade Linie

oder $y = \frac{c}{b}x + c$ oder $y = Ax + B$. Ist nun

parallele zu DM, wo d bestimmt ist, so wird

dies neue y um $d > y$ denn vorher. also das neue

$y = \frac{c}{b}x + (c+d)$, wo sich d. Coeff von x nicht ändert.

daraus erkennen wir den Parallelismus 2 Linien, wenn

in ihren beyden Gl. der Coeff von x immer derselben ist.

geht die Linie durch A, so ist $y = tg\,\alpha \cdot x$ und für jede parallele Linie ist $y = tg\,\alpha \cdot x + C$ oder

$y = Ax + B$

$tg\,\alpha$ sei A. so ist die Gl. von AM, $y = Ax$

Ist andere Linie auf AM senkr. wo PN $= -y_1$ ist y_1 die Länge der Linie als Zahl aber negativ genommen, so ist $-y_1$ die positive Zahl

AP ist die mittl. prop. zwischen y und $-y_1$ so wird

$$y : x = x : -y \quad \text{nach Gl } y = Ax \text{ wird}$$

$$A = \frac{x}{-y_1} \quad \text{also} \quad -Ay_1 = x \quad \text{also} \quad y_1 = -\frac{1}{A}x$$

wo y_1 nicht die Linie aber die mit − zeich versehene Zahl die die Linie ausdrückt. also ist $y = Ax$ die Gl. für beliebige Linie so ist $y_1 = -\frac{1}{A}x$ die Linie welche auf der ersten senkrecht steht.

Für die parallele QS ist die Gl. $y = Ax + B$, ist nur AN auch eine Parallele wo C fest ist so ist die Gl. $y = -\frac{1}{A}x + C$, wo y wieder die negative Zahl angiebt.

Die parallelen Linien stehen auch aufeinander senkrecht.

Also mögen Linien liegen wo sie wollen so erkennt man ~~für~~ daß sie aufeinander senkrecht sind wenn der eine Coeff A der anderen $-\frac{1}{A}$ ist.

Wir hätten eine Curve gegeben, wo die Tgte ist $\angle\alpha$.

$\frac{y_1}{x_1+b}$ ist dx unendlich klein so ist dy Zunahme der Ordinate

$\frac{y_1}{x_1+b} = \frac{dy}{dx}$ d.h. der Abl. von y nach x, zwischen x und y die Gl. der Curve gedacht.

$y_1 = \frac{d}{x}y \cdot (x_1 + b)$ ist die Gl. der Berührungslinie

das lässt sich anders bezeichnen.

die Tang: Lage ist $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = tg\,n = \frac{\partial}{x}y$

oder $y_1 - y = \frac{\partial}{x}y(x_1 - x)$ die Gl. der Berührungslinie, wie wir sie früher gefunden haben ist die Senkrechte auf die Berührungslinie dieselbe und $y_2\ x_2$ die Coord: irgend eines P. der Senkrechten so wird $y_2 - y = \frac{1}{\partial y}(x_2 - x)$ die Gl. der Senkrechten auf der Tangente.

Evolutée et Evolvante sind die Namen der Mittelpunktscurve und der gegebenen Curve. Wenn man sich nemlich die Mittelcur: als entwickelt d. h. ihren gegebenen évolutée denkt, so lässt sich die Curve daraus entwickeln, sie heißt évolvante. z. B. die Mittelp:curve sei AB z. B. von Metall um sie ein Faden EDC. Wenn man denselben von E straff anhält, so entwickelt sich bis D und DE ist dann die Tangente der Curve die man darauf senkrecht ist zu der Tangente der evolvante, so bekommt man so einen P. der letzteren auch diese durch alle andern.

Es ergibt sich daß jede verschiedene Länge von ED verschiedene Curven giebt, und die Integralrechnung lehrt die Länge von ED zu bestimmen aus der gegebenen Curve zu finden.

Wenn der Variable $v = x$ ist so ist $\partial x = 1$ und $\partial^2 x = 0$

ist $v = y$ so ist $\frac{\partial y}{x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{y}}$ welches ein wichtiger Satz ist. daraus

Ist $x = \sin y$ so ist $y = \arcsin x$ und $\frac{\partial y}{x} = \frac{1}{\cos y}$

Den 2ten Abl. wird $\frac{\partial^2 y}{x^2} = -\frac{\partial^2 x}{\partial x^3}$ bezogen nach y

Ist die Parabel $y^2 = ax$ der Krümmungshalbmesser derselben ist oben berechnet worden, wir wollen nun den Krümmungshalbmesser in Abh. von x nach y berechnen dieses c war $= \frac{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2}{x^2} y}$ wir setzen

wir statt $\frac{\partial}{x} y = \frac{1}{\frac{\partial x}{y}}$ also $c = \frac{\left(1+\frac{1}{\partial x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \partial x^3}{\partial^2 x}$

$\partial x^3 = (\partial x^2)^{\frac{3}{2}}$ so wird $c = \frac{(1+\partial x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 x}$ alles nach y

nun ist aus $y^2 = ax$
$x = \frac{1}{a} y^2$ also $c = \frac{\left(1+\frac{4y^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot a}{2}$ oder
$\partial x = \frac{2}{a} y$
$\partial^2 x = \frac{2}{a}$

$c = \frac{(a^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2}$ wo $y^2 = ax$ ist.

Jeder P. des Rades wie z. A beschreibt bei jeder Umdrehung des Rades während der Bewegung parallel einer Geraden Linie der [illegible] unendliche größe. und dies zeigt uns daß die Curve eine transcendente ist. Von A gehen die Abscisse AP sei $= x$, $PM = y$; $AN = v$, $AC = r$. unsere Aufgabe ist die Gl. zwischen x und y zu finden. Während das Rad rollt wird der Bogen $AN = AN_1$, und demnach M_1 der Punkt von der gesuchten Curve; so ist $A_1N_1 = AN = v$. Der Winkel ACN nach der Proportion

$$2r\pi : v = 360 : n^\circ \text{ ist } n^\circ = \frac{v}{r} \cdot \frac{360}{2\pi}$$

nur man muß in Graden den ∠ [illegible] sondern wenn den ∠ durch den 2 Rechten gemessen $3,14\ldots$ oder π heraus kommt, d. h. Bogen [illegible] bei rad. 1

So wird also $n = \frac{v}{r} \cdot \frac{2\pi}{2\pi} = \frac{v}{r} = ACN$, AC ist [illegible]

$$A_1P = r \cdot \sin\frac{v}{r} \qquad x = v - r\sin\frac{v}{r}$$

$$CB \quad r \cdot \cos\frac{v}{r} \qquad y = r - r\cos\frac{v}{r}$$

wenn Gl. für x und y sind eliminirt, (quadrirt und addirt)

$$(x-v)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

wollten man eliminieren so müss. [illegible]

$$\cos\frac{v}{r} = \frac{r-y}{r} \qquad x = \frac{1}{i}\log(\cos x + i\sin x)\ldots$$

$$\sin\frac{v}{r} = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{r} \qquad v = \frac{r}{i}\log\frac{r - y + i\sqrt{2ry - y^2}}{r}$$

Wollen wir nun die Curve Tangente fassen
die Gl. der Tangente ist

$$y_1 - y = \frac{d}{x}y\,(x_1 - x)$$

x_1 und y_1 die Coord: der einzelnen Punkte der Tangente, x, y die zusammengehörige des bestimmten Punktes der Curve. Um den $\frac{d}{x}y$ nun zu finden müssen wir schreiben [illegible] $\frac{dy}{dx}$ [muss] man [sich] finden

denn 1) $x = v - r\sin\frac{v}{r}$ daher ist $dx = 1 - r.\cos\frac{v}{r}$

und 2) $y = r - r.\cos\frac{v}{r}$ daher $dy = \sin\frac{v}{r}$

so $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\frac{v}{r}}{1 - r\cos\frac{v}{r}}$$

$$\frac{\sin\frac{v}{r}}{1-\cos\frac{v}{r}} = \frac{2\sin\frac{v}{2r}\cdot\cos\frac{v}{2r}}{2\sin^2\frac{v}{2r}} = \frac{\cos}{\sin}\left(\frac{v}{2r}\right) = Ctg\,\frac{v}{2r}$$

Wenn nun für x und y die Ausdrücke, wie wir sie bei 1) und 2) gefunden haben, gesetzt. Die Tangente für $x=0$ ist auch $v=0$, die ist dann Gl. der Tangente $y_1 - 0 = Ctg\,0\cdot x_1$ oder

$$y_1 = \frac{\cos 0}{\sin 0}\,x_1 \text{ daraus } 0 = x_1$$

Also im P. A ist senkrechte auf Abscissenlinie die Tangente der Curve.

der Punkt wo die Tangente mit Achse parallel läuft der muss Coeff. Cotg. $\frac{v}{2r} = 0$ seyn, denn wird $y_1 = y'$. nun ist dies der Fall wenn ist cotg $\frac{v}{2r}$ od. $\frac{\cos\frac{v}{2r}}{\sin\frac{v}{2r}} = 0$, denn wenn $\cos\frac{v}{2r} = 0$ oder wenn $\frac{v}{2r} = \frac{1}{2}\pi$ ist oder $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$ d. h. bei mehreren Stellen ... v ist also $= r\pi$ d. h. der ½ Peripherie, also wenn v der ½ Peripherie ist so ist der Punkt der Curve für die größte Tangente

der Krümmungshalbmesser. dazu nehmen wir die Formel des Halbm.: $c = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}$, x, y, dy, dx haben wir oben

$d^2x = +\frac{1}{r}\sin\frac{v}{r}$ $d^2y = \frac{1}{r}\cos\frac{v}{r}$ den Werth Krümmungshalbm. giebt $c = \frac{\left(2\left(1 - \cos\frac{v}{r}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{r}\left(\cos\frac{v}{r}\left(\cos\frac{v}{r}\right)^2\right) - \left(\frac{1}{r}\sin\frac{v}{r}\right)} = \frac{r8\left(\sin\frac{v}{2r}\right)^3}{\left(\sin\frac{v}{2r}\right)^2}$

$c = \pm 8r . \sin\frac{v}{2r}$

die Curve selbst heißt Cicloide. sie ist 2 oder 4 mal der Umfang des Kreises oder Rades. Man könnte man sich in der Speiche nehmen und die Curve die er beschreibt, bestimmen, das Stück a muss gegeben seyn das andere ist r−a. Die Curve die dann entsteht heißt Epicicloide. Sie [illegible] in der Verlängerung der Speiche, die Curve heißt Hipocicloide. Ihr Anwendung ist es bei Schöpfrädern wenn man Form der Cicloide [illegible] [illegible] [illegible]

Reihe 4. [illegible]

196

217

Ist die Gl. der Mittelp. curve zwischen b und a gegeben

$$b = \pi(a)$$

und will ich daraus die Gl. der 1. Curve finden d.h. ich suche $y = \varphi(x)$, wenn ich die curve als gegeben betrachte. So nehmen wir die Gl. 2, 3, 4 und eliminieren b, und a, und bekommen 1 Gl. zwischen x, y, dy, d^2y d.h. die Gl. der gesuchten Curve. [illegible] ist ganz dieselbe [illegible] mit [illegible] betrachten wir die [illegible] Stücke [illegible] eliminirten wir x, und y, jetzt a und b. Ich bekomme eine diff. Gl. 2. Grad weil d^2y vorkommt, und integrirt sie, und da treten 2 Constante hinein, und die Constante bestimmt die Länge der Constante.

Wäre die Constante C. so müßte sie bestimmt werden. [illegible] wenn ich einen Pt. der Curve [illegible]. Denn ich setze x = die Absciße des Pt. y = Ord. des Punktes und dann [illegible] bestimmt. Der Krümmungs ½ Messer ist $\frac{(1+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y}$ und dann bestimmt man die Constante.

1) $(y-b)^2 + (x-a)^2 = c^2$

2) $(y-b)\,dy + (x-a) = 0$

3) $(y-b)\,d^2y + dy^2 + 1 = 0$

4) $b = \pi(a)$

Die Gl. $c = \frac{(1+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y}$ ist der Krümmungshalbmesser

die Gl. der Parabel ist nun $y^2 = ax$ diff.

$$y\,dy = \tfrac{1}{2}a \quad \text{noch einmal diff}$$

$$y\,d^2y + dy^2 = 0 \quad \text{daraus}$$

folgt $dy = \frac{\frac{1}{2}a}{y}$ und $d^2y = \frac{\frac{1}{4}a^2}{y^3}$

der Masse angesetzt wird

$$c=\frac{\left(y^2+\frac{1}{4}a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}a^2}=\frac{4\left(y^2+\frac{1}{4}a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2}$$

statt $y^2 = ax$ gesetzt wird. $c = \frac{4\left(ax^2+\frac{1}{4}a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2} = \frac{4\left(x+\frac{1}{4}a\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$

Will ich nun den Krümmungshalbmesser am Scheitel der Parabel finden so setze ich $x=0$ giebt $c=\frac{1}{2}a$

Zu ... wird der Krümmungskreis statt der Curve genommen und den Ort der Krümmung bestimmt die Länge des Halbmessers

Wäre die Gl. $y^3 = av^2$ so wäre $y^2 = (av^2)^{\frac{2}{3}} = ax$ also $(ax)^3 = (av^2)^2$ oder $ax^3 = v^4$ eliminirt man aus $y^3 = av^2$ und $ax^3 = v^4$ das v so wird wieder $y^2 = ax$. Und nun statt der Gl. $y^2 = ax$ die 2 Gl. zwischen x, y, v gegeben, und das v muss eliminirt werden, und man will den Krümmungshalbmesser finden wo nicht dx vorkommt, so geschieht es so. Ich verwandle die Formel so daß nicht der Abl. von y nach x vorkommt, sondern nur Abl. von y nach v. also statt $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx}$ nach v gesetzt

ob nun also $C = \frac{\left(1+\left(\frac{\partial}{x}y\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2}{x^2}y}$ oder $\frac{\partial}{x}y = \frac{\partial y}{\partial x}$ nach v beyde

statt $\frac{\partial^2}{x^2}y = \frac{\partial}{x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x} =$

$= \frac{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial x^3}$ [illegible]

also $C = \frac{\left(\partial x^2 + \partial y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x}$

Die Gl. 1) $y^3 = av^2$ nach v diff. giebt 3) $3y^2 dy = 2av$ und noch mal

4) $3y^2 d^2y + 6y dy^2 = 2a$

Die Gl. 2) $ax^3 = v^4$ diff giebt 5) $3ax^2 dx = 4v^3$ wieder

$3ax^2 d^2x + 6ax dx^2 = 12 v^2$ durch 3 div

6) $ax^2 d^2x + 2ax dx^2 = 4v^2$

Nun sind 6 Gl. aus denen x, y, dx, dy, d^2x, d^2y sich finden und [illegible] [illegible] darstellen.

Hat man eine function φ von x & y, so kann ich derjen nehmen

$\frac{\partial}{x}\varphi$, $\frac{\partial}{y}\varphi$, $\frac{\partial^2}{x^2}\varphi$ $\frac{\partial^2}{x\cdot y}\varphi$, $\frac{\partial^2}{y^2}\varphi$ etc —

Wäre die Gl. $\varphi(x,y,z)=0$ so kann ich sie nur nach z aufgelöst denken u. z ist dann $\varphi(x,y)$, ich suche nun die Abl. von z nach x, y, $\frac{\partial^2}{z^2}$ etc ohne die Gl. aufzulösen

Soll ich die Abl. nach x haben, so muss ich y constant denken, z den funct denken die dann ganz identisch 0 macht. Ich bekomme wenn ich nach x diff., wenn y constant ist, 1) $\frac{\partial}{x}\varphi + \frac{\partial}{z}\varphi\cdot\frac{\partial z}{x}=0$

2) $\frac{\partial}{y}\varphi + \frac{\partial\varphi}{z}\cdot\frac{\partial z}{y}=0$ $\left(\frac{\partial z}{x}\text{ ist gerade }\frac{dz}{dx}\right)$ ist Abl. nach y

$\frac{\partial^2}{x^2}$ finde ich wenn ich die Gl. 1 wieder diff. nach x

$\frac{\partial\varphi}{x}$ muss ich besonders als f. von x u. z betrachten nach x genommen diff. gibt $\frac{\partial^2}{x^2}\varphi + \frac{\partial^2}{xz}\varphi\cdot dz$

$\frac{d\varphi}{z}\cdot\frac{dz}{x}$ ist Product diff. nehmen zu erst den Abl. u. multipl. mit andern Factor, dass von $\frac{d\varphi}{z}$ u. multipl.

gibt $\frac{\partial^2}{xz}\varphi\cdot dz + \frac{\partial^2}{z}\varphi\left(\frac{\partial z}{x}\right)^2$, und folglich

2te Factor ebenso besonders, da $\frac{dz}{x}$ nur f. von x ist

es gibt also $\frac{d\varphi}{z}\cdot\frac{\partial^2}{x^2}z$

alles unterstrichene gesetzt giebt = 0

die Gl. 1) nach y diff oder Gl 2) nach x differentiirt giebt dasselbe, nur thun dies ersten, und erhalten durch ersten Glied giebt 2 Gl.

$$\frac{d^2}{xy}\varphi + \frac{d^2}{xz}\varphi\cdot\frac{d}{y}z + \frac{d^2}{yz}\varphi\cdot\frac{d}{x}z + \frac{d^2}{z^2}\varphi\cdot\frac{d}{y}z\cdot\frac{d}{x}z + \frac{d}{z}\varphi\cdot\frac{d^2}{xy}z = 0$$

d^2 nach y wird ebenso gefunden u. s. f.

Beispiele. wenn $a^2z^2+b^2y^2+c^2x^2=1$ die Gl. der Ellipsoid, paraboloid oder hyperboloid

diff. giebt 1) $2a^2z\cdot\frac{dz}{x} + 0$ weil y const: $+ 2c^2x = 0$

woraus findet sich $\frac{dz}{x}$ leicht. diff nach y giebt

2) $2a^2z\cdot\frac{dz}{y} + 2b^2y = 0$ woraus $\frac{dz}{y}$ sich findet

um $\frac{d^2}{x^2}z$ zu finden diff man die Gl. 1)

Ist y f(x) und x wird x+h gesetzt so geht y nach potenz von h nach dem Taylorschen Satz

$$y_{x\pm h} - y_x = dy \cdot h + d^2y \frac{h^2}{2!} + d^3y \frac{h^3}{3!} + \ldots$$

Hat x einen völlig bestimmten Werth und h erst positiv, dann negativ beyde dem Mom. d. Werth so bekommt ich 3 Werthe x, x+h, x+(-h) die stetig nebeneinander stehen weil h im momente d. Werthe gedacht ist. x+h, x, x+(-h) ist der mittelste Werth y als beyde andern, so steigt man den Werth von x macht d. y zu einem größten; ist d. Werth kleiner beyde, so steigt man d. Werth von x nimmt d. y zu einem kleinsten

wenn $y_{x\pm h} - y_x$ positiv ist der Werth d. kleinsten, ist d. Unterschied negativ wenn $y_{x\pm h} - y_x$ so ist der Werth d. Größten.

ist in $dy\,h$, dy muss 0 seyn der Rest positiv oder negativ wenn das 1te Gl. positiv oder negativ ist, also ist auch der Unterschied ± wenn das 1te Gl ± ist. Also soll x das kleinste seyn so muss es (d. Werth zu dem) dy zu 0 machen ist $dy = 0$ so fällt d. 1te Gl. weg. Ist nun d^2y positiv so ist d. Unterschied bleibt positiv, h sei ±, dies den Werth von x, der dy u. dy^2 zu 0 zugleich macht so giebt es weder d. minimum noch maximum macht der Werth x auch d^3y zu 0 so ist wieder min. u. max. da. Wollte dy einen gebr. funct seyn

z.f. h

und sollte der Kleinere durch den Werth $z\,a$ zu 0 werden, so gilt die Taylorsche Ab[illegible] nicht.

z. B. $y = (x-a)^{\frac{2}{3}}$ ist allemal positiv denn es ist gleich $\left(\sqrt[3]{x-a}\right)^2$ ist $x = a$ so ist der kleinste Werth möglich $= 0$. Setze ich $x = x+h$ so wird $y_{x+h} = y_x + \frac{2}{3}\frac{1}{(x-a)^{\frac{1}{3}}} h + \dots$

setze ich $x = a$ so wird der Nenner $= 0$ und die Reihe findet nicht statt. Denn setze ich $x = x+h$ so wird $(x-a+h)^{\frac{2}{3}}$ ist $x=a$ so wird

$$y_{a+h} = h^{\frac{2}{3}}$$

Ist $z = f(x,y)$ und ich will die Werthe finden, welche das z kleiner machen

wir nehmen den Taylorschen Satz für 2 Variable

$$z_{x+h,\,y+ph} = z_{x,y} + \left\{\frac{d}{x}z + \frac{d}{y}z\cdot p\right\}h + \left\{d^2z + 2\frac{d^2}{xy}z\cdot p + \frac{d^2z}{y^2}p^2\right\}\frac{h^2}{2!} + \dots$$

oder $z_{x+h,\,y+ph} - z_{x,y} =$

der Unterschied ist immer positiv wenn für h und p selben Werth ich will, dann ist z klein als alle
kleinsten Werthe $\quad z$ ist grösser als ein
Unterschied negativ ist.

die Hauptbedingung ist daß für jeden Werth von p der Coef. von p. = 0 ist. das wird wenn jedes Glied = 0 ist. d. (.1) $\frac{dz}{dx} = 0$ 2) $\frac{dz}{dy} = 0$

Wenn für solche Werthe von x und y aus den Gl. 1 und 2, der Coeff von p^2 positiv wird für jeden Werth von p. so ist der Unterschied positiv also z minimum. wird coeff. p^2 nicht ~~positiv~~ und nicht 0 für jeden ~~positiv~~ negativ so ist z maximum.

1) $A + 2Bp + Cp^2$ wird für jeden Werth von p positiv wenn A und C pos. und $AC > B^2$ immer negativ wenn A und C neg und $AC > B^2$ denn 1) ist $= C\left(p + \frac{B}{C}\right)^2 + \left(A - \frac{B^2}{C}\right)$ woraus sich die Bedingungen ergeben.

das vorhergehende erfordert daß $\frac{d^2}{x^2}z \cdot \frac{d^2}{y^2}z < \left(\frac{d^2}{dxdy}z\right)$ und die ersten 2 ~~Coeff~~ Factoren positiv sind

Die form $p+q\sqrt{-1}$ ist die allgemeinste
durch die 7 Operationen können keine
andere form der Zahl vor. Wir wollen
nun nachweisen daß auch bei Auflösung der höheren
Gl: [von mehr Grad] die allg: form. für x unter den Wurzeln
keine andere form der Zahl vorkomme

1) $$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots\ldots A_{m-1} x + A_m = 0$$

oder $$S\left[A_r x^{m-r}\right] = 0$$

ist die allgemeinste Gl des m^{ten} Grades. Alle Coeff haben
die form $p+q\sqrt{-1}$ also $S\left[\left(B_r + C_r\sqrt{-1}\right)x^{m-r}\right] = 0$
u ich will beweisen daß es reelle Werthe für y u z
ist so daß wenn ich sie für x in die Gl setze,
sie eine reelle Werthe gibt.

Es sei $\sqrt{-1} = i$ der kürze wegen.

der ganze Ausdr: [in Gl I] links wird die form annehmen
$\varphi + \psi i = 0$ wo φ und ψ [ganze] Funct von y u z sind ist die Gl I)
$= f(x)$ so ist $f(x) = \varphi + \psi i = 0$, und ich will beweisen
daß es reelle Werthe von y u z gibt die φ u ψ
zu 0 machen, denn $\varphi = 1\,y^m + (\;)\,y^{m-1}\cdot z + (\;)\,y^{m-2}z^2 + \cdot\,(\;)\,z^m$
ψ auch so mit anderen Coeff die alle reell sind

Gebe ich dann z u. y von $+\infty$ bis $-\infty$ alle Werthe, so suche ich den Werth der φ zu 0 macht, desgl. der ψ zu 0 macht.

Ich betrachte den Funct von $\varphi^2 + \psi^2$ denn sie ist entweder positiv oder 0. und suche die kleinsten Werthe der Funct die ich F nenne dann soll sie $= 0$ seyn so ist dies der kleinste Werth weil die F. positiv ist.

$$\text{I)}\quad \frac{d}{y}F = 2\left(\varphi \frac{d}{y}\varphi + \psi \frac{d}{y}\psi\right) = 0$$

$$\text{II)}\quad \frac{d}{z}F = 2\left(\varphi \frac{d}{z}\varphi + \psi \frac{d}{z}\psi\right) = 0$$

die 2 Gl. müssen die Werthe y und z liefern

Beyde werden genügt wenn ich φ und $\psi = 0$ mache
es ist nun nachzuweisen daß die Gl: ~~auch~~ durch keine andern Werthe von φ u ψ. müssen genügt werden

$$1)\quad f(x) = \varphi + \psi i$$

das diff nach y giebt

$$2)\quad \frac{d}{x}f(x)\cdot\frac{d}{y}x = \frac{d}{y}\varphi + i\frac{d}{y}\psi.$$

1) diff nach z z.B.

$$\left(\frac{1}{i} = -i\right)$$

$$\frac{d}{x}f(x)\frac{d}{z}x\, i = \frac{d}{z}\varphi + i\frac{d}{z}\psi,$$

$$\left\{\frac{d}{y}x = 1 \text{ und } \frac{d}{z}x = i\right.$$

durch i mult: $3)\quad \frac{d}{x}fx = -i\frac{d}{z}\varphi + \frac{d}{z}\psi$

daraus ist 4) $\frac{d}{y}\varphi = \frac{d}{z}\psi$ 5) $\frac{d}{y}\psi = -\frac{d}{z}\varphi$ 227

Im Abs. II kann ich schreiben $\Theta = \left(-\varphi\frac{d}{y}\psi + \psi\frac{d}{y}\varphi\right)$

Abs I mit $\frac{d}{y}\varphi$ u. II mit $\frac{d}{y}\psi$ multipl. u. subtrahirt II von I

giebt $\varphi\left(\left(\frac{d}{y}\varphi\right)^2 + \frac{d}{y}(\psi)^2\right) = 0$

φ wird nun = 0 wenn der ( ) muss 0 ist der durch 0 kann ich nicht wegdividiren.

$\psi\left(\left(\frac{d}{y}\varphi\right)^2 + \left(\frac{d}{y}\psi\right)^2\right) \neq 0$ wenn genommen das φ

φ u. ψ sind $\neq 0$ ~~[illegible]~~ wenn der neg. abhängige muss 0. ist. Nun sind die Ableitungen y u. Z den der ( ) zu 0 machen, machen den Funct f(x) nicht zu einem Kleinsten —

Soll ( ) = 0 sein so ist $\frac{d}{y}\varphi = 0$ | u. $\frac{d}{y}\psi = 0$, | $\frac{d}{z}\varphi = 0$ | u. $\frac{d}{z}\psi = 0$

dass Minimum wird aus 2ter Abl. erkannt es ist kein Minim. wenn $\frac{d^2}{y^2}F \cdot \frac{d^2}{z^2}F$ nicht größer ist als $\left(\frac{d^2}{xy}F\right)^2$ d.h. ist der Diff negat. so kann kein Min. sein

aus 1) $\frac{\partial}{y} F = 2\left(\varphi \frac{\partial}{y}\varphi + \psi \frac{\partial}{y}\psi\right)$ ist die 1te Abl.

die 2te Ableitung zu finden a) $\frac{\partial^2}{y^2} F = 2\left(\varphi \frac{\partial^2}{y^2}\varphi + \psi \frac{\partial^2}{y^2}\psi\right)$

die fehlenden Glieder sind [illegible] partiellen Gl. für y u. z die ich an [illegible] setze $= 0$

aus 2) $\frac{\partial}{z} F = 2\left(\varphi \frac{\partial}{z}\varphi + \psi \frac{\partial}{z}\psi\right)$ die 2te Abl. ist

b) $\frac{\partial^2}{z^2} F = 2\left(\varphi \frac{\partial^2}{z^2}\varphi + \psi \frac{\partial^2}{z^2}\psi\right)$ der [illegible] Abl.

Nun diff 1) nach z giebt c) $\frac{\partial^2}{yz} F = 2\left(\varphi \frac{\partial^2}{yz}\varphi + \psi \frac{\partial^2}{yz}\psi\right)$ d.

Nun diff. ich die Gl. I) $\partial f(x) = \frac{\partial}{y}\varphi + i\frac{\partial}{y}\psi$ und

II) $\partial f(x) = \frac{\partial}{z}\varphi - i\frac{\partial}{z}\psi$

nach y giebt d) $\partial^2 f(x) = \frac{\partial^2}{y^2}\varphi + i\frac{\partial^2}{y^2}\psi$ dieselbe I) nach z

e) $\partial^2 f(x)\, i = \frac{\partial^2}{yz}\varphi + i\frac{\partial^2}{yz}\psi$ oder e) $\partial^2 f(x) = -i\frac{\partial^2}{yz}\varphi + \frac{\partial^2}{yz}\psi$

II diff nach y giebt f) $\partial^2 f(x) = \frac{\partial^2}{yz}\varphi - i\frac{\partial^2}{yz}\psi$ nach z diff

giebt g) $\partial^2 f(x) = -i\frac{\partial^2}{z^2}\varphi - \frac{\partial^2}{z^2}\psi$

daraus sind in d, e, f, g die linken Glieder gleich

229

und ich bekomme $\frac{\partial^2}{y^2}\varphi = -\frac{\partial^2}{y^2}\psi = \frac{\partial^2}{z^2}\psi$

ferner $\frac{\partial^2}{y^2}\psi = \frac{\partial^2}{y^2}\varphi = -\frac{\partial^2}{z^2}\varphi$

die mittleren Ausdrücke setze ich in a, b, c und ich der ersten und letzten [illegible] finde und bekomme

α) $\frac{\partial^2}{y^2}F = 2\left(\varphi\frac{\partial^2}{y^2}\varphi + \psi\frac{\partial^2}{y^2}\psi\right)$

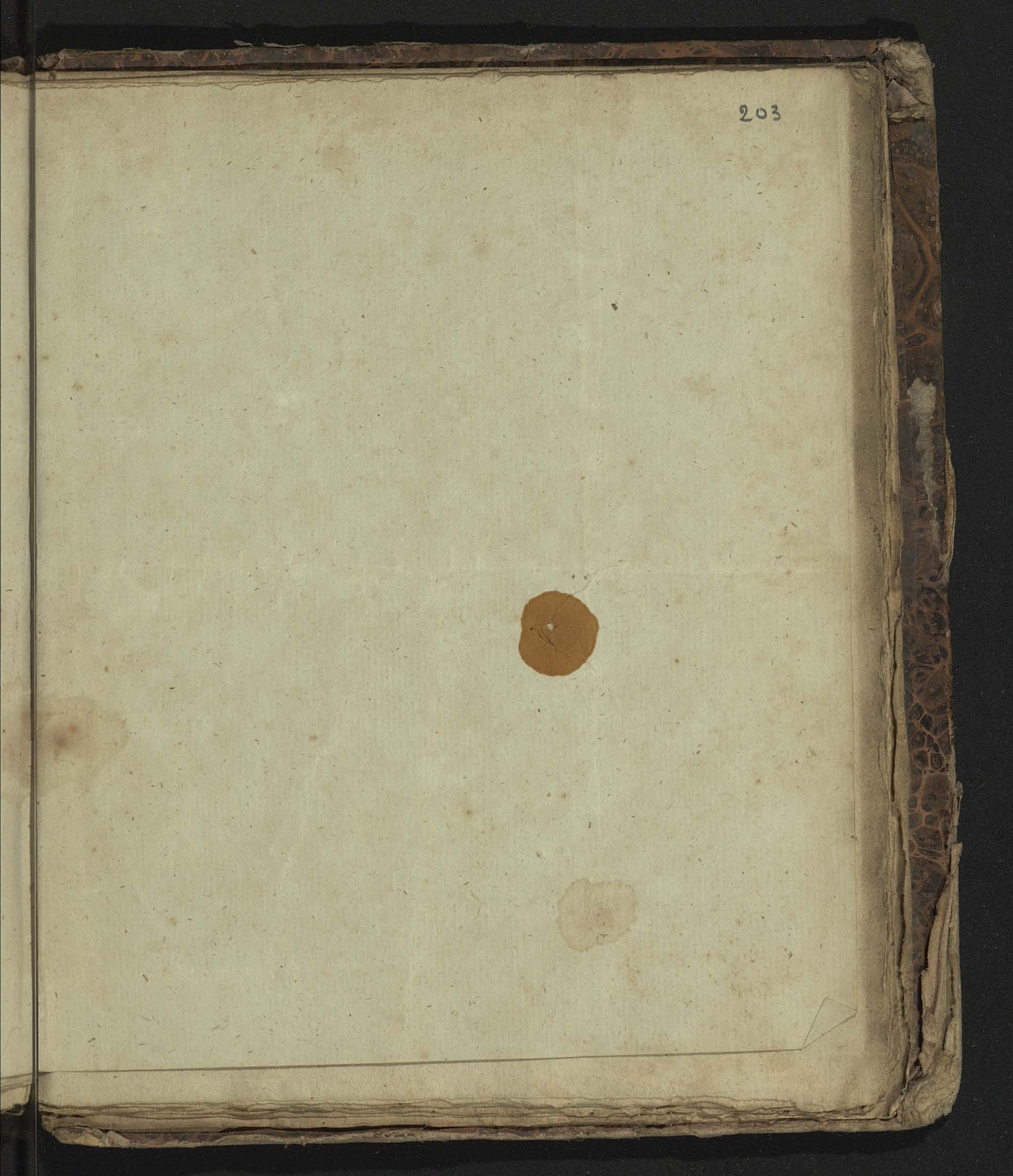
β) $\frac{\partial^2}{z^2}F = 2\left(-\varphi\frac{\partial^2}{y^2}\varphi - \psi\frac{\partial^2}{y^2}\psi\right)$

γ) $\frac{\partial^2}{yz}F = 2\left(-\psi\frac{\partial^2}{y^2}\varphi + \psi\frac{\partial^2}{[illegible]}[illegible]\right)$

nun soll $\alpha\beta - \gamma^2$ [illegible] negativ oder 0 geben [illegible] wird F minimum [illegible] von der Form $p + q\sqrt{-1}$ es existirt also ein Werth (mannigfaches) α der $f(x)$ zu 0 macht [illegible] $\frac{fx}{x-\alpha}$ eine Funct geben vom $(m-1)$ Grade [illegible] dieselbe [illegible] die Coeff haben dieselbe Form $+ qi$, also sind alle m Werthe von x die Werthe $p + q\sqrt{-1}$

[illegible] $\frac{15}{9}$ 28







Allgemeine Übersicht der Euklidischen Geometrie vorgetragen nach Fr. Ohm ?. 1ten Th. S. J. 1827.

Schon aus der Einleitung in die Algebra ist uns deutlich geworden, daß die Mathematik in 2 Theile zerfällt:

Die Lehre der unbenannten Zahlen

die Lehre der benannten Zahlen

die letzte heißt auch die Größenlehre weil eine Größe eine benannte Zahl ist und zerfällt in den allgemeinen und besondern Theil. – Im ersten werden die Eigenschaften abgehandelt, die allen Größen zukommen, worüber ausführlich gehandelt worden ist im ersten Theile Ohm Elementar Math: I Band; und im zweiten werden besondere Größen besonders berücksichtigt. Da sich nun in der Natur zwei Hauptdinge vorfinden, nämlich Raum und Kraft, und diese sich als benannte Zahlen behandeln lassen, so zerfällt der besondere Theil der Größenlehre in

die Raumgrößenlehre und

in die Kraftgrößenlehre oder Mechanik.

Um eine Raumgröße zu bestimmen, muß man zuerst den Raum selbst definiren

Der Mathematiker hält sich immer nur in den Grenzen der Begriffe, und ist ferne davon, wie der Metaphysiker, sich über dieselben hinwegzusetzen. Als solcher hat er einen Gegenstand bloß gesetzt, und schreitet sonder alle Furcht in seiner Wissenschaft überall zur überzeugenden und nicht problematisch, vermuthungsweise dargestellten. deshalb sucht er, bei Erklärung eines Dinges, sich dadurch seinen Begriff anzueignen daß er ihn zerlegt in seine Bestandtheile, und sollten einige davon auch noch zusammengesetzt seyn, so zerlegt er auch diese, bis er zu den einfachsten Begriffen kommt. Denn er muß [illegible] denn gienge die Zerlegung ohne Ende, dann würden wir nie die einfachsten Begriffe finden können, folglich keine Begriffe, von zusammengesetzten Dingen selbst, und also keine Wissenschaft mehr ap[illegible] Weiter kann auch das Einfachste nicht erklärt werden, sonst müßte es in seine Bestandtheile zerlegt werden und die sind nicht vorhanden. Solche einfachsten Begriffe sind: die Zeit, die Zahl

3

der Raum etc. Der Raum wird vorge-
nommen entweder in einer Linie
oder in einer Fläche oder in einem
Körper. Alle diese Begriffe sind ein-
mal doch sie zu erklären vermag man
nicht, ihrer Einfachheit wegen. Eben dahin
gehören die Begriffe der geraden und
krummen Linie. Denn eine Richtung ist
eben so viel als eine Linie, daher damit
ist nichts gesagt, daß eine gerade Linie
eine solche wäre, deren alle Punkte in
einer Richtung gingen. Und wenn man
sagt die krumme Linie sei die, deren Pun-
kte verschiedene Richtung haben, so ist die
Erklärung ebenso unrichtig, denn dadurch, daß
man sagt verschiedene Richtung, erhellt
daß die Richtung an sich eine gerade Linie
ist, verschiedene Richtungen werden also
verschiedene gerade Linien sein, und solche
bilden keine krumme sondern eine ge-
brochene Linie.
Denkt man sich eine Linie im Raume
begrenzt, so hat sie einen Anfang oder
ein Ende und ein solches giebt uns einen
Begriff des Punktes, der <u>im Raume ist</u>
<u>selbst aber kein Raum ist</u>

Widerspr.

4. Die Stetigkeit oder die unendliche Theilbarkeit der Grössen macht es, daß Linie, Flächen und Körper die an sich keine Grössen sind, zu Grössen oder benannten Zahlen werden können; denn

„da eine Grösse aus der unbenannten
„Zahl und der Einheit zusammenge-
„setzt ist,

so nehme ich einen Theil zur Einheit und die Menge der Theile zur unbenannten Zahl und diese geben zusammen Quantitaet. Aber dieses nun überall der Fall ist, so behandle ich zwar die quanta selbst stillschweigend und so als quantitaeten gerade.

Zu: Wenn auch 2 Dinge wesentlich von einander verschieden sind, so können sie doch einander so nahe wie möglich gebracht werden. So kann ich mir einen krummen Linie gerad abzu[illegible] denken, eine gebrochene Linie so denken daß sie der krummen ganz nahe kommt. Deshalb kommt es daß wir später gerade und krumme Linien vergleichen. So kann man stetig wirkende Kraft mit einer unstetig wirkenden vergleichen, wenn ich mir die einzelnen Kräfte unendlich schnell auf einander folgend wiederholt denke. So ist auch die Quadr. des Kr: nur durch Näherung möglich.

die einfachsten Begriffe zu combiniren
ist der Zweck der Geometer und umgekehrt. Daraus
soll nicht die Anwendbarkeit sondern die Fertig-
keit des Combinirens genommen werden.
Euklidische Geometrie zu treiben, heißt, die Geom:
in dem Geist verfolgen, wie wie sie in sei-
nen Schriften vorgetragen findet. Sie ist
ein Gegensatz der Analytischen Geom: die in
dem letzten ½ Jahrh: entstanden. Die letzte
ist nur eine Größenlehre, wo die Existenz der
Geometr: Objecte hier auch nur als ~~Objecte~~ vorschwebend er-
scheinen. Anwendung der Algebra auf Geomet:
ist wieder was anders. Es sind bloß einzelne
Algebraischen Aufgaben ohne festem System.
Größe quantitas ist eine jede benannte Zahl, was
benannte Größe werden kann heißt Quantum.
Die Linien Flächen und Körper sind Quanta weil sie zu Quan-
titaeten werden können, der Punkt ist kein
Quantum, weil er zu keiner Quantität wird
weil er solcher der nicht theilbar ist.
Was von allen Größen zugleich gilt, gilt auch
von den Raumgrößen, die besonderen Eigen-
schaften der Raumgrößen zu betrachten
ist die Geometrie, als können also drei Theile
der G: entstehen Longimetrie Linienlehre, Plani-
metrie Flächenlehre, Stereometrie Körperlehre.
Man kann sich dieser Lehren Elemente, oder höhere
Lehrart geben, und so entsteht die niedere
und höhere Geometrie, es wird sich zeigen daß

6 neuen der Parallelen und zeigt allen
krummen Linien deutlich und Körper die sehr
Geometrie ausmachen.
Analytisch und synthetisch bezieht sich nicht auf
die Sache sondern bloß die Vortrag. Die
Sache ist keine analyt. oder synthet. Methode
fähig. Analytisch ist man wenn den Gegen-
stand zergliedert und zu dem einfachsten
kommt, hat ich das für mich zu viel gethan
so kann ich es andern umgekehrt vortragen
Wir sehen die Sache ist immer dieselbe geblie-
ben. Daraus folgt daß es keine Wissenschaft
giebt die Analysis heißt. der analytische Vor-
trag giebt ein Gründlichkeit, denn die Art der
Zusammensetzung geht da verloren. Und nur
beyde Methoden in Verein führen zum gründ-
lichen Erkennen. So giebt es keine synthetische
und keine analytische Geom: dagegen giebt
es eine constructionelle und eine calculative
Geometrie die der synth: und analyt: entspre-
chen. Die Euclidische Geom: ist die constructionelle
Wie die ganze Mathem: ist, die Kunst mathem: Sätze
ohne Lehrbuch aus sich selber zu erfinden
so erhält man diese Kunst, nicht durch Erler-
nung der Sätze selbst, sondern der Principien
selbst. So besteht die Geom: nicht in Geom: Sätzen
sondern in der Kunst Geom: Sätze selbst auf-
zufinden, und dieser Kunst wird ein
einzelnen Sätzen angeübt, die für den
praktischen Gebrauch nöthig sind. —

Die nächstfolgenden Sätze sind die Hauptsätze 7.
die unumstößlich sind. Die Menge der Haupt-
sätze beläuft sich nicht über 20. Die Hauptsätze
werden eingetheilt in Hauptsätze der Linien
und Flächen, weil Körper aus Flächen zu-
sammengesetzt sind.
Die ersten Hauptsätze der Linien sind:
Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches, Ungl.:
zum Ungl. addirt giebt ungleiches u. s. w.

Die Lehre der ebenen Flächen.

Man muss zuerst die Flächen betrachten
die von 2 Linien welche sich schneiden be-
grenzt sind.
Wenn aber 2 Linien schneiden sich nun
ein einem Punkt gemein haben (welche man
nach 2 Linien in einer Richtung hinzieht
man sie von einem Pkt. aus gehen, die
sie haben d. Punkt gemein) die sich schnei-
denden Linien gehen ins Unendliche.
Die Linien CA u. CB begrenzen 2 Ebenen
die unendlich sind. Solche begrenzte Ebenen
heißen Winkeln — Neigungen oder Landschaften
in Geometrie einzuführen ist erlaubt —
Ich denke mir die Linie nur unendlich denken,
denke ich mir sie endlich so ist ein Punkt da,
und bei einem Punkte nur eine Linie. Da man
2 Punkte hat, so ist immer eine Linie zwischen
denselben ob sie zeichnen oder nicht, so müssen
die Linie AB denkbar man A u. B finden der
Linien wären, und es würde eine von 3 Lin.
begrenzte Fläche sein

A ——— C ——— B

C ⟨ A, B

der Linien ihren Schenkel den gemeinen S. Scheitel
Es ist nun zu untersuchen ob der ∠ eine Größe
ist, und ob er eine endliche Größe ist. Die
Größe selbst ist eine benannte Zahl und jedes
Ding das sich als benannte Zahl darzustellen
läßt ist ein quantum. So ist ein unendlicher
∠. kein quantum. Jede begrenzte Linie ist ein
quantum. der ∠ ist allemal eine endliche Größe
durch eine bestimmte endl. Zahl auszudrücken,
die Frage ist nun ob man den ∠ in congruente
Theile theilen kann und wie? die Theile des ganzen
müssen dieselben Art sein also Theile des
∠ auch Winkeln, folglich ist der ∠ nicht so
zu theilen weil die einzelnen Theile nicht
∠ sind. Man muß nun untersuchen ob ein ∠
getheilt werden kann so daß einzelnen Theile
wieder ∠ sind. das geschieht, wenn man aus
dem Scheitel unendliche Linien zieht, so kann
der ∠ als ein zusammengesetzt [?] aus andern be-
trachtet werden. der ∠ ist also eine endliche
Größe
Congruenz ist dem Raume Eigenthümlich, 2 begrenzte
Räume sind congruent wenn sie mit ihren Gren-
zen zusammenfallend gedacht u. s. w.
So sind den ∠∠ congr: wenn ihre Schenkel zusammen
fallen können.
Angewandte Linien sind A—C—B (β, α) so also Länge
sind die ∠∠ congr: weil man sich den W. α in β
so gelegt denken kann daß CB auf CB fallt
und der AC ein Theil AB ist so muß auch AC
auf AC fallen. der Winkel A—C sind 2
der eine ist sch der ke: ist als der gleiche W.
der andern erhoben der größe ist als derselben.

Aus der Grössenlehre ist bekannt daß die 9
Grössen gleichartig sind, die durch verschiedene
ben: Zahl: ausgedrückt w. und die ist größer
wird, beyde auch einerley Einheit bezogen
durch größere ben: Zahl ausgedrückt wird.
demnach folgt daß wenn der ∠ durch b. Z. ausge-
drückt wird in congr: Th. getheilt werden
muß, so wird der größ ∠ mehr solcher Theile
haben als der kleinere, wenn die Einheit gleich
groß seyn soll, dieselbe ist in beyden, daher
legt man den einen ∠ auf den anderen
so decken die einigen Theil ebenso viel
und es bleiben vom größern noch Theile, also
gilt die 2te Def. Wenn man zwei Winkel mit
dem Scheitel und einen Schenkel aufeinander
legt, so ist der der kleinere dessen Schenkel in die Mitte fällt
Theile ich den kleinsten ∠ in ∞ congr: Theile
so ist jeder Theil ein unendlicher, der wenn
der kleinste ∠ völlig bestimmt ist, so ist auch
der unendliche gleichbestimmt.
Da nun der [illegible] ∠ kleiner ist als ein kleinster
so kann er nicht [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] werden, und [illegible] [illegible] ∠ ein
[illegible] kleiner sind [illegible] [illegible]
größer ist, als ein kleinster.

<u>Erklärung</u> Scheitelwinkel sind solche die
den Scheitel gemein haben und die Schenkel
des einen Verlängerung die Schenkel des
anderen geben.

<u>Lehrsatz</u> Scheitelw: sind einander gleich
Beweis. denn sie sind Diff: von einerley Minuenden
und Subtrahenden so ist $\beta = (\alpha+\beta) - \alpha$
$\delta = (\alpha+\delta) - \alpha$

Erkl. Nebenwinkel sind zwei solche Winkel die zusammen einen flachen ausmachen

– Das Verhältnis der Winkel zu einander lernt man vorzüglich kennen daß man sich 2 beliebige Linien denkt und diese mit einer dritten durchschneidet.

Bey z. B. ist $x = m$ so ist $y = p$, $z = v$, u. s. f. Und $y + m = 2R$. so ist $u + v = 2R$. $z + q = 2R$. $x + p = 2R$. u. s. f.

1 Lehrsatz Denkt man sich eben solche Linien so erhalten [illegible] Sätze. nämlich

I Ist $x = m$ so schneiden sich die Linien nirgends d. h. sie sind parallel

II Sind die Linien ∥ so ist $x = m$.

III Ist $x > m$ so schneiden sich die Linien auf der Seite wo der spitzere ∠ liegt.

IV. Wenn sich die Linien schneiden so ist auf der Seite wo sie sich schneiden der äußere ∠ $x >$ als der innere m.

Diese 4 Sätze können als die Grundlage der Elem. Geometrie betrachtet werden. Da [illegible] [illegible] eine geradlinige [illegible] [illegible] zu betrachten ist hier die Rede, so können nur solche Linien sein, die sich untereinander schneiden oder nicht schneiden! Und in beyden Fällen können diese Sätze und alle daraus [illegible]

Wahrheiten zur angewendet werden
Also die Mathematik anlangt, so sollen
diese Sätze allerdings hier, weil sie nur
einlinigten Flächen (oder Winkel) bilden, und
von solchen handeln wir hier. dagegen
Dreiecke zu den dreilinigten Flächen gehö-
ren und man hier überzeugt ist daß nicht
welches Dreiecke existiren

Beweis des 1sten Satzes. Es ist $x=y$, dann sind
auch $z=q$, $m=o$, $n=p$, $n=x$, $m=z$,
$y=p$, $o=q$, [illegible] $t=p$. d.h. alle Winkel des oberen
∠ EACDH sind gleich allen Winkel des
kleineren ∠ EACH oben, daher die ganze untere
Figur ist der oberen congruent. Legt man
nun die 2 Figuren also aufeinander so daß
EA auf EC, AD auf CF, AB auf CB, BE auf
BG, BH auf BH, BG auf AD, sollte so
folgt daß man sich die Linien schneiden
müßten, so sich an zwei Stellen schneiden
müßten, was gegen den Begriff der gra-
Linien ist.

II Satz. Von diesem Satze giebt es bis jetzt
keinen mathematischen Beweis. Euclid
musste denn, daher er ihn andern Lehrsätze
ihn oder einen andern aus dem zu ihn
ableiten, als Grundsatz aufstellen. bei
Euclid ist es der 11te Grundsatz. ein
mathematischer Beweis ist folgender

Wir wissen nicht ob daß 2 Linien sind die sich nirgends schneiden. Daher muß man sie mit einer dritten durchschneiden so ist alles unten wie oben. Und durch den Satz der Logik vom zureichenden Grunde, können die Winkel nicht ungleich sein, denn es ist kein Grund dazu

III Satz ist $m > r$ so schneiden sich die Linien oben. denn ist $m > r$ so ist auch

$q > r$ und der $n < s$ so ist

$u > n$

Wenn wir daher oben so wie ... die Figur umdrehen so werden die Schenkel EA und BF, weil $q > r$, $u > n$ die Stellung AF und BE liegen. Ob sich nun eine ... von den Linien schneiden nicht (denn schnitten sie sich nicht so würde $m = r$ sein nach II) so müßten sich die Linien AC und BD schneiden

IV Satz Die Linien schneiden sich oben und es folgt $m > r$ denn wäre $m = r$ so würden die Linien sich nicht schneiden würde $m < r$ so würde $p > u$ und die Linien würden sich unten schneiden, welches alles der Voraussetzung widerspricht. —

13.

Anwendungen dieser Sätze.

Wir betrachten 3 Linien die sich wechselseitig schneiden AC und CB werden durch eine dritte AB geschnittene Linie wird nun der 4te Satz angewendet, dass sich jetzt [?] 2 Linien die sich schneiden und von 3ter durchschnitten sind daher ist $m > u$

dieser Satz ist gegr. der äußeren ∠ gemeint wird wenn man die eine Seite verlängert. Allein die Linie an sich ist unendlich, braucht also nicht verlängert werden

Es ist weiter $w > n$ da $m = q$ so ist $q > u$ da CB und AB und AC geschnitten sind so ist $q > v$ daher $m > v$. Da die Wechselwinkel kleiner sind auch die Seiten wo sich die Linien schneiden. Jetzt nun daran wo sich die Linien nicht schneiden so ist noch mehr zu folgern [?] Wir erhalten bloß im Gedächtnis [?] dass

$m > u$ und $m > v$

da $m > u$ so ist $u + n < 2R$. so auch $u + v < 2R$
$v + n < 2R$.

d. h. in jedem △ ist Summe zu 2 Winkeln $\angle < 2R$.

Wir können weiter // Linien ziehen und zwar durch die ausgezeichneten Punkte A, C, B es sei DE die parallele. Es ist die Kreuzung wird DE den ∠ x und z schneidend. Daher denke ich mir von C eine Linie CD gezogen die mit Blick von x abschneidet $= n$. (dass geht weil $x > n$ ist) Lieb ich dies gethan dann behaupt ich die Linie ist parallel. weil DC und AB durch AC geschnitten ist und $n = DCA$. Da nun $x = z$ ist so wird auch z gleichzeitig durch die parallele.

Da nun $x = n$, $z = u$ ist (weil DE und AB einander parallel) und $x + v + z = 2R$, so sind $n + v + u = 2R$.
oder da $s = n$, $r = u$, $y = v$ da $r + y + s = 2R$ so sind $n + v + u = 2R$.

d. h. alle innern Winkel im Δ sind $= 2R$;

da $x = a + r = n + u$, und $z = b + s = u + n$ so ist im Δ der äussere ∠ = 2 innern die ihm entgegengesetzt sind

Dies sind die Hauptsätze, aus denen die Dreiecks-Folgerungen gezogen werden können.

Hauptsätze

5 Sätze der Congruenz, und 5, wenn man aus Linien und ∠∠ eines Δ auf Linien und ∠∠ eines Δ schliessen kann.

Wenn 2 Dreiecke sind und eine Seite des einen = ist einer S. des andern, und daß die 2 Winkel der Seiten einander gleich sind, so folgt daß sie sich decken. Ist auch ein ∠ gleich dem anliegenden, so folgt daß die Richtungen der Nebenseiten aufeinander fallen und die [illegible] anliegender ∠ als = gegeben, denn fallen die 2 [illegible] Nebenlinien aufeinander, müssen also im 1 P. sich schneiden und decken sich. Läßt man den 1. ∠ weg und kennt die an-liegenden S. und das ∠, [illegible] gleich, so würden die ΔΔ wieder Congruent. denn 3 ∠∠ im Δ = 2R. also, sind 2 ∠∠ = 2 ∠∠ so ist der 3te ∠ = dem 3ten ∠, so folgt daß wenn eine Seite und irgend 2 ∠∠ gleich sind, so sind die ΔΔ Congruent.

Die 2 übrigen Congruenzen folgen später

Wenn in einem Δ 2 Seiten = sind, so sind die ihnen entgegengesetzten ∠∠ auch =

Bew. Ist $AC = BC$ so ist $A = B$. Die Sätze der Congr. betreffen die Gleichheit der Winkel und Seiten, so sind sie hier anzuwenden, weil die aus Gleichheit zu[r] Deckung [illegible] 3 [illegible] Stücke ableiten kann. So soll $A = B$ seyn so müssen 2 Dreiecke bilden. ich denke mir das Δ noch einmal bezeichne es durch a, b, c. also

sind die ∠∠ nicht von einander verschieden
da nun die Seiten AC u. BC also auch ac u. bc
gleich sind so ergiebt sich da C = c so
werden die ΔΔ congruent wenn man das
Δ A ineinander congruent so ist A = a da
a = B war so ist A = B.
Ich könnte auch AB halbiren in D und müßte
beweisen daß ACD cong. DCB geht nicht weil
der Congr. noch nicht war. daher stelle ich mir
Senkrechte von C oder halbiren ∠ C und
zu ~~[illegible]~~ stelle wäre den Congr. noch nicht
bewiesen, aber nicht im 2 Fall. Im ersten
Falle ist noch zu beweisen daß die Senkrechte
wirklich AB durchschneidet. Im 2 Fall muß
CD nothwendig AB treffen weil sie, als
halbirende zwischen AC u. CB gehen muß
Congr. Ist nun Linie CD denkbar die den ∠ C
in 2 congr: 2∠ theilt? der ∠ ist eine Größe
wie man eine solche Linie denkbar ist.
der Raum erscheint so daß ich von C in der
Ebene ACB eine Menge Linien ziehen
kann. denke ich mir eine Linie CD, so
halbirt sie den ∠ oder nicht. halbirt sie ihn
nicht so ist der eine größer als der andere
denk ich mir nun die Linie CD stetig so fort
bewegt daß der kleinere ∠ immer wächst und
der größere sich verkleinert, dadurch kommt
man endlich eine Lage der Linie CD wo
die 2 ∠∠ = sind. —
daß so was zu beweisen braucht schon ein
Gebiet der Metaphysik, und wenn sich in
so was nicht einzulassen, hat Euclid den
Beweis gebraucht a b in Elem. Geom:

d e

16. Der Eucl. Beweis kann auch so erläutert werden oder

Nämlich: Es sei das Δ acb wo $ac = cb$ und ich soll beweisen $a = b$. Weil $dab = eba$ und $dac = cbe$ so wird $a = b$. die ΔΔ dac und ecb decken sich nach dem 1ten Fall, daher $d = e$, $da = eb$ so decken sich die Dreiecke dab und aeb, was zu beweisen war.

Oder ich schneide ad und eb = ab so wird $a = b$ wenn $cab = dba$ und $cae = dbc$. die Dreiecke aec und cdb decken sich, daraus folgt daß $ae = db$ da nun $aec = cdb$ so ist $adb = aeb$, daher decken sich die Dreiecke adb und aeb was zu beweisen war.

Wenn man nun betrachtet daß wenn 2 Seiten = sind die ihnen entg. ∠∠ auch = sind, so folgt nicht daß umgekehrt [illegible] = sind, daher ist folgender Lehrsatz nöthig

Wenn in einem Δ zwei ∠∠ gleich sind so sind die ihnen entgegengesetzten Seiten auch =

Beweis ist nämlich derselbe wie für [illegible] — Man kann auch so beweisen daß man b halbirt, oder auch, nach Euclid a contrario. —

Der 4te Satz der Congr: wo alle 3 Seiten = sind
so ist nun nachzuweisen daß 2 ∠∠ einander = sind.
das heißt nicht dazu die Dreiecke so zusammenzu
zustellen daß die 2 gl: Seiten ein gleichschenkl.
Δ bilden. Die Gegeneinanderlegung kann man der ΔΔ
nicht, weil ∠∠ unbekannt sind. Man ~~[illegible]~~ sich
den Dreiecken, daß man zeigt man die Seite mit der
andern daß eine Umgrenzung statt findet.
Bei dem ersten Dreieck ist A hol so wird B
entweder auch hol oder flach oder erhaben. ist
A flacher (der erhaben) ist B ~~[illegible]~~ = 2 Recht: oder kleiner als
2 Rechte also nur hol. also sind nur die 2
Fälle noch zu untersuchen wo B flach oder erhab:
ist, weil keine andere Fall nicht denkbar ist
Man kann nicht zeigen ist b ein spitzer so fällt
die Linie cd so, aber ist b spitz soll der c auch spitz
sein? das soll ich zu beweisen. Da ich das jetzt nicht
weiß so weiß ich nicht wo bd fällt also wo cd
fallen wird. Eigentlich ist das Wunderliche nur
b ∠ winkel warum soll c auch gerade ∠ sein?

Der 5te Satz der Congr. Wird 2 Sn gl: und ein ∠
so ist es der 1 Fall wenn der ∠ eingeschlossen ist,
ist der ∠ nicht eingeschlossen so ist es unsere
Fall - wir wollen untersuchen ob solche ΔΔ
congr: sind.

Ist AB = DE, AC = DF, B = E. Wir legen die
Dreiecke auf einander, so fällt A auf D und B auf E
auf einander. Da B = E so muß BC auf FE fallen
es fragt sich ob C auf F fällt. Fallen sie nicht
zusammen so liegen sie doch in der Richtung BC
in F'' oder F'. Fällt F in F' so wären ABF zwei
Δ. Nun müßten AC = DF so müßten AC = AF' also
x = z   da z + f = 2 R. so machten x + f zwei Rechte
und das ist nicht möglich

Dann ist AE gemacht: DE = EC, so ist AD = AC
also die Winkel D + ACB = 2 Rechte weil
ACE + ACB = 2 R.

ist aber A + F oder C + F nicht gleich 2
Rechten sind so stellt F u. C in den
Dreiecke sind congr: Ob AC > AB davon
war nicht die Rede. Man findet in ähnlich
anderen Satz statt des hier gegebenen. 2 ΔΔ sind
congr wenn 2 Seiten = sind und der ∠ der
größern Ste. gegenüber. Ist der Satz wahr?
ist DF > DE so muß F spitzer ∠ seyn denn
wäre F recht oder stumpf so würde er der
größte ∠ im Dreiecke, also die Ste. DE die größte
da doch DE < DF. da nun DF = AC u. DE = AB
so ist AC > AB mithin auch C spitz. also C + F
als 2 spitze ∠ < 2 R. also nicht gleich 2 Rechte
Es fehlt auch dieser Lehrsatz und nehmen ihn
wir ist der richtige allgemeine. denn er
entspricht auch den Fall daß der ∠ der kleinern
Seite gegenüber liegen kann, weil wenn C + F
> 2 Rechte, so denken sich die Dreiecke

Giebt es nun mehr Congruenzen? – so folgen jetzt 1. Seite und
2 Winkel dergestalt gestellt die wir schon behandelt haben
drei ∠∠ können keine Congr: geben weil die Länge der
Schenkeln von den ∠∠ unabhängig ist

9ter Lehrs. In einem Δ wenn eine Seite > ist als die
andere so ist auch der ∠ der der größern Seite
entgegen liegt > als der, der der kl: Ste entg. liegt

Beweis

Es sei das Δ ABC wo AB > AC und ich sage C > B
Weil AB > AC so folgt zweitens d. h. ich kann AC auch
AB abschneiden, oder kann AC verlängern
und die Verläng = AB machen und in beiden
Fällen kommt ich zum Ziel

Denn schneide ich AC auf AB ab, so muß weil $AC < AB$ ist derselbe vor B zu liegen kommen, ist der Pt. D da so ist auch das Δ ACD da, und ich ziehe die Linie CD nur um sinnlicher den Beweis darzustellen, da $AC = AD$ so ist $ACD = ADC$ da $ADC > B$ so ist $ACD > B$ also $C > B$.

Wäre aber $AC = AB$ so müßte D Pt. unter C fallen weil $BC > AC$. da $DC = AB$ so ist $D = B$ also $D > CBA$ da $D < ACB$ so ist $ACB > CBA$.

Der vorletzte Satz ist der umgekehrte und wird a contrario bewiesen. —

Der letzte Satz ist daß die Summe der Seiten größer als die 3te.

Der Beweis ergiebt sich leicht wo es leicht auch einzusehen ist, daß die Figur nur so seyn müsse.

Ich kann auch so beweisen soll $(AB + BC) > AC$ so muß BC auf AC abgeschnitten werden übrig geblieben der kleinere ist als AB. Es wird ~~AB~~ weiter links geschlossen. denn $\beta = \gamma$ da nun $\delta + \gamma = 2R$. und $\alpha + \beta < 2R$ so ist $\alpha < \delta$ also $AD < AB$

Läßt sich BC auf AC nicht abtragen, dann ist der Satz ohne alles erwiesen

Oder AC in 2 Theile theilen zu denen jeder kleiner ist als ~~AB~~ ~~die~~ anliegende Linie. Ich stelle den Punkt: da ADB ein rechter ist so ist $AB > AD$ eben so $BC > DC$. der Einwand ist daß den Durchschnitt herausstellen kann. Man muß also untersuchen wo die Linie fallen muß. Sie fällt immer

20 innerhalb des stumpfen ∠ weil dem 2 ∠∠ mehr als 2 Rechte im △ vorkommen, ist B und C spitz ∠ so muss sie innerhalb fallen weil sie nicht außerhalb fallen kann. ist einer der ∠∠ stumpf so wird sie außerhalb fallen, innerhalb des spitzen ∠ denn ist aber AB allein > AC, ist der eine ∠ gerade so ist ihr dann AB > CA

Ich kann aber die Linie AC so in 2 Theile theilen indem ich von B eine Linie ziehe die den ∠ B halbirt, wenn solche Linie trifft nun AC da $p = q$ und $r > q$ so ist $r > p$ also AB > AD ebenso ist $s > q$ also BC > DC

Lehrsatz

Eine Linie AB um A in einer Ebene gedreht giebt den Kreis. – Oder eine krumme Linie deren Punkte alle von einem gleichweit entfernt sind. 1stens ist also eine beliebige geschlossene Linie um den Kegel eine Kreis. 2tens ist solche Linie? – dies in unserer Defin: von Bewegung spricht, so hat diese Bewegung nicht in die Mechanik, weil dort die Schnelligkeit mit verbunden ist. die Bewegung deutet nur die Lage der Linie AB in einem andern Orte

In der Kreislinie unterscheidet man Center ∠ und Periph. ∠

Der Center ∠ ist doppelt dem Periph ∠ = wenn beyde = Bogen abschneiden

Beweis der erste Fall wenn C im Schenkel liegt ist offenbar. der 2te Fall wenn C innerhalb die Schenkel liegt denn ist der 1te Fall doppelt, auch ist der 1te Fall doppelt wenn C außerhalb die Schenkel liegt

Der 2te Fall kann auch so angesehen werden daß der ersch-
ienen Winkel ACD 2 mal ∠ ABD denn ACE = 2 ABE
und ECD = 2 EBD. Oder so daß 2B = ACD. daraus erhellet
[illegible] daß jeder Peripherie ∠ auch dem Durchmesser
∠ [illegible] entsprechend ist.

Anwendungen.

Ist ein Viereck im Kreise, so giebt 4 Peripherie
∠∠, also ist A 2 mal ∠ DOB und C 2 mal ∠ DOB
da nun A + C 2 mal ∠ DOB + DOB so sind sie
2 mal kleiner als 4 Rechte d. h. = 2 Rechten.

Von Tangenten und Sehnen

Um nicht erst untersuchen ob solche Linien giebt, wie [gewöhnlich]
man sagt, man Tangente ist. so muß ich den Begriff
voranschicken daß wenn eine senkrechte zum Rad:
in beyde Seiten verlängert wird unendlich ist, denn es
[illegible] schon in dem Begriffe der Linie gegeben ist,
so hat diese mit der Peripherie nur einen P. gemein und alle übrigen Punkte
außer der Peripherie. Aus folgendem aber so eine Tangente ist die grade Linie welche
senkrecht ist auf den Radius zu seinem Endpunkt in der Peripherie mit
[illegible] daß eine Tangente nur einen P. mit der Peripherie gemein
hat. Denn wären wir andere P. X. so ist einer CX als
Hypotenuse > als der Radius also ihr Endpunkt außer der
Peripherie.

Jede Linie die in dem Ende des Radius nicht senk-
recht fällt, schneidet die Peripherie noch einmal. Denn
Denn unter welcher Richtung ich auch die Linie
ziehen mag so fällt sie doch entweder links
oder rechts des Radius, und ich würde also
auch sie immer eine Senkrechte vom Centrum
fällen können. Ihr Durchschnitt sei Z, so wird
CZ als Cathete ∠ als die Hypotenuse denn der Rad: ist
[illegible] fällt der P. Z innerhalb des Kreises, also die
gezogene Linie durch D auch innerhalb des Kreises,
[illegible] also die Peripherie noch einmal
schneiden. — [illegible] solche Linie heißt daher
Sehne. Anwendung: [illegible] ist dies daß der ∠ CBA = BE
[illegible] CD Tang ist so ist CB oder FB senkrecht. da A = ½ FCB = 1 Rechten
so ist AFB + ABF = 1 Rech = CBF also F = ABC = E

Hauptsätze der Dreiecke

22.

Es ist mit dem Δ deshalb wichtig zu untersuchen, denn jede geradlinige Figur lässt sich durch Diagonalen auch [in] Dreiecke verwandeln.

1 Satz. Theilt man ein Δ durch eine parallele in 2 Dreiecke, so sind die Quotienten der entsprechenden Theile einander gleich. d.h. $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE}$

Lehrsatz. [Wenn] man eine Linie fb in ab m mal aufträgt, so zieht man nun durch f eine Parallele, bg auch m mal in bc aufträgt, dann zieht man durch die Abtheilungspunkte der Linie ab ∥ zu ac und durch dieselben Punkte derselben ∥ zu ab, so bilden sich an der Seite bc m Dreiecke die congruent sind, und aus ihrer Congruenz folgt, daß die einzelnen m Theile von bc einander = sind.

und fg in ac auch m mal.

Um nun unsern Satz zu beweisen so wählen wir nun ein Theilchen XB (man auch ein Moment des Verschwindens), so daß sich XB in DB m mal und in BA n mal ohne Rest aufträgt. Zieht man nun durch X ∥ XC so geht auch BC in BE m und in BC n mal auf. Da nun die Quotienten der beiden durch Menge ihrer Theile ausgedrückt werden, so wird $\frac{n}{m} = \frac{n}{m}$ wo $\frac{n}{m}$ zur Einheit BX und $\frac{n}{m}$ zur Einheit $\frac{BC}{C}$ hat. oder

Eine Linie im Moment des Verschwindens hat keine Länge, da dieser ist verschwindend.

$AB = m\,BX$ | $BD = n\,BX$
$CB = m\,Bl$ | $BE = n\,Bl$
$AC = m\,Xl$ | $DE = n\,Xl$

also $\frac{AB}{BD} = \frac{m\,BX}{n\,BX} = \frac{m}{n}$, $\frac{CB}{EB} = \frac{m\,Bl}{n\,Bl} = \frac{m}{n}$, $\frac{AC}{DE} = \frac{m\,Xl}{n\,Xl} = \frac{m}{n}$

daß die Einheiten verschwinden, wird Theil nichts, denn ab ist $BX = \angle Bl$, so kann man die verschwindenden Einheiten auch einen beweisen, daß sie statt durch BX zu messen durch $\angle Bl$ zu messen, der entstehende Quotient der sich durch ∠ wegdividieren lässt.

Lehrsatz: die umgekehrte Behauptung. 23.

Beweis. Denkt man sich die Linie DE nicht gleichgültig, so ziehen wir eine parallele DZ durch D wo Z trifft, müssten wir nicht haben dann wird $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{ZC}$ da nun nach Voraussetzung $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}$ so wird $EC = ZC$ also muss Z mit E zusammenfallen. also ist DE doch parallele.

Folgerungen

Sind 2 Dreiecke und es sind bezüglich gleiche ∠∠ so sind sie entweder congr. oder das eine ist kleiner als das andere und lässt sich in die Lage △ bringen. Wenn 2 △△ 2 ∠∠ bezüglich = haben so gilt dasselbe. Wenn 2 △△ 1 ∠ bezügl. = haben und die beyden Seiten die den ∠ einschliessen 2 = Quotienten bilden, so gilt auch dasselbe. Denn ist 1 ∠ gleich so kann es dem △ die Lage △ geben und es wird das 2te Lehrs.

Lehrsatz. Wenn in einem △ 3 Seiten durch 3 Seiten des andern △ dividirt = Quotienten geben, dann sind die ∠∠ bezüglich = diejenigen die ∠∠ die den gleichen Quotienten gegenüberliegen.

Beweis. ich schneide ab u. bc auf AB u. BC von B [illegible] also wird [illegible] so ist DE ∥ mit AC also wird

$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE}$ da nun $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}$

u. $DB = ab$, $BE = bc$ so ist $\frac{AC}{DE} = \frac{AC}{ac}$ also

$DE = ac$ so ist die Congr. und bewiesen.

Weil wenn die Sache der Ähnlichkeit der △△ worüber man lieber schweigen soll, der Ähnlichkeit gilt nicht, und so alles Begriff lässt sich nicht angeben.

Gleichheit der △ ohne Congruenz

Gleich sein oder einerlei Quantität haben heisst dass die beyden Grössen durch eine und dieselbe benannte Zahl sich ausdrücken lassen.

Ein Viereck von 2 Paaren parallelen Seiten ist Parallelogramm

1) Satz. 2 Parallelogramme von = Höhen u. Grundlinien sind einander =

Beweis CD muß auf EF fallen sonst würden die Höhen nicht gleich, so wird ACED kein 4eck oder Δeck. u. s. f. nach Euclid

2) Satz 2 Dreiecke sind = wenn sie gleiche Höhe und Grundlinien haben

3) Satz ein Δ ist einem parallel. die Hälfte wenn es mit demselben = Höhe und Grundlinien hat.

Beweis des 2. Satzes. — Man denke sich 2 Dreiecke der Figur gleich. bildet man aus diesen ΔΔ Parallel. so beweist sich daß die Fläche = sind, und daß die ΔΔ ihre Hälften sind

Der dritte Satz entspringt hieraus.

Daraus entwickelt sich der Pythagoreische Satz welcher so wie ein Folgerungssatz ist.
Beweisen heißt ein etwas entwickeln, was ich schon als wahr erkannt hat, und hat man einmal als wahr erkannt, kann man von einem Satze, viele Beweise liefern, was aber keinen Nutzen hat. das wahre beim Studium ist ein System, wo der dritte Satz aus dem zweiten allein entspringen, und denselben Satz durchbrechen aus dem zweiten. das Endziel ist nur die Gottheit, keine Logik brauchen, sondern alles unbenommen als wahr einmal erklären

Proportionalität d. Dreiecke

Zwei Dreiecke, die einerlei Kanten (Höhe od. Grdl.) haben so verhalten sich zwey Dreiecke wie die Grundlinien oder Höhen.
Beweis ab sei Linie a die in der Grundlinie von A m mal in der Grundlinie von B n mal enth.; u. d. Beweis ergiebt sich
derselbe Satz gilt auch für parallelogramme

Zweier beliebiger Rechtecke, verhalten sich
wie die Produkte aus Grundl. und den Höhen.
Beyde Grundlinien welche nur durch eine Einheit
messen, eben so beyde Höhe, eben so beyde
Einheiten, erhält man aus Grund a, b und
Höhen c, d, und Fläche p. q. so soll $\frac{p}{q} = \frac{ac}{bd}$
weil sich ergibt [illegible] wenn man um das
parall. [illegible] nach Erforderniß.
Also Satz wird zu der allg. Größenlehre
als allg.: beweisen, wie allen Größen
man durch von 2 verschiedenen Elementen
abhängen. Ist nun q, b, d, einzeln = 1
d. h. ist das zweite Rechteck ein Quadrat
und muß den ersten Rechteck durch [illegible]
in die Seiten des ersten durch Seiten des
quadrat dann wird $\frac{p}{1} = \frac{ac}{1} = | p = ac$
d. h. der Inhalt eines Parallelogramms ist
= dem Produkte der Höhe durch die Grundlinie
dieses [illegible] zu beweisen war das [illegible]

a □ hat den Vorzug daß der [illegible]
wird für den Fall daß der Seite des Quadrats
a in dem Rechtecke [illegible] enthalten ist.

Da nun △ die ½ des parallel.: der Seite ein [illegible] ist, so lassen sich daraus alle
Verhältnisse des △ und der Kreise bestimmen

Ende der Planimetrie

d. 10 August 1827.

